

הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

8 בדצמבר 2016

1 חבורות דיהדרליות

את החבורה הידהדרלית D_n - מסדר $2n$ - ניתן להגדיר כחבורת הסימטריות של מצולע משוכלל בכל n צלעות. יש n שיקופים ועוד n סיבובים. כל סיבוב ρ מקיים $\rho^n = 1$, ויש כאלה שזה ממש הסדר שלהם. כל שיקוף ε מקיים $\varepsilon^2 = 1$. את D_n ניתן לתאר על ידי היחסים הבאים:

$$\rho^n = 1, \varepsilon^2 = 1, \rho\varepsilon = \varepsilon\rho^{-1}$$

ניתן לחשוב על D_n גם כחבורת האוטומורפיזמים של מעגל באורך n .

1.1 הצגות ממימד 1

ε חייב להיות מועתק לאחד מבין ± 1 . מהיחס השלישי, ומכך שהצגה קומוטטיבית, נקבל כי גם ρ נועתק לאחד מבין ± 1 . אם n אי זוגי, אז בהכרח $\rho \rightarrow 1$, שכן $\rho^n = 1$. כעת נוכל לבחור בחופשיות $\varepsilon \rightarrow \pm 1$. כך נקבל 2 הצגות שונות ממימד 1. אם n זוגי, נוכל להעתיק את ρ בחופשיות לאחד מבין ± 1 . לכן כאן נקבל 4 הצגות ממימד 1.

1.2 הצגות ממימד 2

ראשית, ניקח $1 \leq k < \frac{n}{2}$. נגדיר הצגה π_k :

$$\rho \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$$
$$\varepsilon \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & -\cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\pi_k}(\rho^l) = 2 \cos \frac{2\pi lk}{n}$$
$$\chi_{\pi_k}(\varepsilon^l) = 0$$

נראה שההצגה אי פריקה:

$$\begin{aligned} (\chi_{\pi_k}, \chi_{\pi_k}) &= \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{n-1} 4 \cos^2 \frac{2\pi lk}{n} \stackrel{?}{=} 1 \\ n &\stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{n-1} 2 \cos^2 \frac{2\pi lk}{n} = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\cos \frac{4\pi lk}{n} + 1 \right) \\ 0 &\stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \cos \frac{4\pi lk}{n} \end{aligned}$$

זוה נכון משום שזה החלק הממשי של סכום שורשי היחידה מסדר מסויים, שכידוע הוא 0. נראה שיטה אחרת להיווכח באי פריקות של ההצגה. נגדיר את π_k בצורה איזומורפית:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_n^k & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-k} \end{pmatrix} \\ \varepsilon &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כאן קל לראות שאין ווקטורים עצמיים משותפים, ולכן בהכרח π_k אי פריקה. כעת ניווכח שמצאנו את כל ההצגות האי פריקות של D_n . אם n אי זוגי, יש 2 הצגות ממימד 1, ואז

$$1^2 + 1^2 + 2^2 \cdot \frac{n-1}{2} = 2n$$

אם n זוגי, יש 4 הצגות ממימד 1, ואז

$$1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = 2n$$

ולכן אלה אכן כל ההצגות האי פריקות של D_n . נרצה לראות את π_k בצורה נוספת. נשים לב כי $C_n \leq D_n = \langle \rho \rangle$, ואז יש את ההצגה:

$$\rho \rightarrow \zeta_n^k$$

כעת, אם נשרה את ההצגה הזו לחבורה D_n , נקבל הצגה שאיזומורפית להצגה π_k , שכן

$$\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}(1, 0) \oplus \mathbb{C}(0, 1)$$

המחובר הראשון הוא תת ההצגה של C_n , והמחובר השני הוא הזזה שלה.

ננסה לראות את האיזומורפיזם האחרון גם לפי כרקטרים. אנחנו יודעים את הכרקטר של ההצגה של C_n , ונחשב את הכרקטר של ההצגה המושרית. נקרא לכרקטר של ההצגה של C_n בתור τ , ואת ההצגה המושרית ψ .

$$\begin{aligned}\chi_\psi(\rho^l) &= \hat{\tau}(\rho^l) + \hat{\tau}(\varepsilon\rho^l\varepsilon) = \tau(\rho^l) + \tau(\rho^{-l}) = \zeta_n^{kl} + \zeta_n^{kl} = \\ &= 2 \cos \frac{2\pi kl}{n} = \chi_{\pi_k}(\rho^l) \\ \chi_\psi(\varepsilon\rho^l) &= \hat{\tau}(\varepsilon\rho^l) + \hat{\tau}(\rho^l\varepsilon) = 0 + 0 = 0 = \chi_{\pi_k}(\varepsilon\rho^l)\end{aligned}$$