הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

1 בדצמבר 2016

1 הצגות מושרות

תהיינה $H \leq G$ סופיות, W הצגה של H מעל $\mathbb{C}$. נגדיר

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W = \{f : G \to W \mid \forall g \in G, h \in H \;\; f(gh) = hf(g)\}$$

הערך בנקודה כלשהי בקוסט כלשהו של H קובע את כל שאר הערכים בקוסט, ולכן אלה כמעט פונקציות מהמנה אל W. כמובן

$$V \cong W^{[G:H]}$$
$$\dim V = [G:H]\dim W$$

זהו מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$, כמובן. כעת נוכל להגדיר

$$(gf)(x) = f(xg)$$

לכל $g \in G, f \in V, x \in G$. נבדוק שזו הצגה:

$$(gf)(ht) = f(htg) = hf(tg) = h(gf)(t)$$

לכן $gf \in V$. קל מאוד לבדוק שהפעולה לינארית. נשאר רק לשים לב כי

$$((gh)f)(x) = f(xgh) = (hf)(xg) = (g(hf))(x)$$

ולכן זו אכן הצגה. יש הומומורפיזמים של הצגות של H בין V, W בשני הכיוונים: ראשית $i : W \to V$ ששולחת את $w \in W$ לפונקציה ששולחת את 1 אל w, וכל $g \notin H$ לאפס. לא מסובך לבדוק שזו העתקה לינארית, ושהיא הומומורפיזם של הצגות של H. בכיוון השני, על ידי $j : V \to W$ נתאים בין פונקציה f לערך שלה על 1. שוב לא מסובך להשתכנע שזה הומומורפיזם:

$$j(hf) = (hf)(1) = f(1 \cdot h) = f(h) = hf(1) = hj(f)$$

פשוט לראות את i כשיכון, ואז אפשר לכתוב

$$V = \bigoplus_{g\in G\big/H} gW$$

וזה כבר מזדהה עם ההגדרה מהכיתה להצגה מושרית.
דרך נוספת להגדיר: הדדיות פרובניוס.

$$\mathrm{Hom}_H\left(\sigma, \mathrm{Res}\rho\right) \cong \mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}_H^G\sigma, \rho\right)$$

σ הצגה של H, ρ הצגה של G. במונחי קטגוריות - הפונקטור של השראה צמוד מימין ומשמאל לפונקטור של צמצום, בקטגוריית ההצגות של חבורות סופיות מעל $\mathbb{C}$.
יהי $\alpha : \mathrm{Ind}_H^G\sigma \to \rho$. נספק $\beta : \sigma \to \rho$. נגדיר

$$\beta = \alpha \circ i$$

קל יחסית לבדוק שזה איזומורפיזם לינארי, לא נעשה את זה כרגע.

דוגמה השראת ההצגה הטריוויאלית מכל תת חבורה יוצרת את הצגת התמורות של פעולת G על המנה. בפרט, עבור $H = 1$, מקבלים את ההצגה הרגולרית של G.

כעת אם χ היא הכרקטר של W, אז הכרקטר ψ של ההצגה המושרית הוא

$$\psi\left(g\right) = \sum_{x\in G\big/H} \hat{\chi}\left(x^{-1}gx\right)$$

כאשר

$$\hat{\chi}\left(t\right) = \begin{cases} \chi\left(t\right) & t \in H \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

דרך נוספת להגדיר את ההצגה המושרית:

$$V \cong \mathbb{C}\left[G\backslash H\right] \otimes W$$

כאשר G פועלת על W טריוויאלית. נגדיר העתקה בי לינארית:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}\left[G\backslash H\right] \times W \to V \\ &\left(\sum \lambda_i H a_i, w\right) \mapsto f\left(a_i\right) = \lambda_i w \end{aligned}$$

ברור שזו העתקה בי לינארית, ולכן מהתכונה האוניברסלית של מכפלה טנזורית, יש העתקה לינארית

$$\tau : \mathbb{C}\left[H\backslash G\right] \otimes W \to V$$

נרצה להראות כי $\tau \in \mathrm{Hom}_G\left(\mathbb{C}\left[H\backslash G\right] \otimes W, V\right)$.

$$\tau\left(g\left(\sum \lambda_i H a_i \otimes w\right)\right) = \tau\left(\sum \lambda_i H a_i g \otimes w\right) = \left(f\left(a_i, g\right) = \lambda_i w\right)$$
$$g\tau\left(\sum \lambda_i H a_i \otimes w\right) = \left(f\left(a_i g\right) = \lambda_i w\right)$$

שתי אלה הן פונקציות שמתנהגות באותה צורה.
משום שיש שוויון מימדים נותר רק להראות חד־חד־ערכיות או על. נראה על. אם

$$f\left(H a_i\right) = w_i$$

אזי מתקיים

$$\tau\left(\sum H a_i \otimes w_i\right) = f$$

מההגדרה.