הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

24 בנובמבר 2016

ראינו בהרצאה כי הכרקטרים האי פריקים של חבורה G מעל $\mathbb{C}$ הם בסיס אורתונורמלי למחרב פונקציות המחלקה.

מכאן מסיקים כי מספר ההצגות האי פריקות הוא מספר מחלקות הצמידות של G.

בנוסף, ראינו את הפירוק של ההצגה הרגולרית: אם $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ הן כל ההצגות האי פריקות השונות של G, אזי ההגה הרגולרית Reg מתפרקת בתור

$$\mathrm{Reg}=\bigoplus_{i=1}^{r}\alpha_i^{\dim(\alpha_i)}$$

מכאן קיבלנו שתי מסקנות:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\left(\dim\alpha_i\right)^2 &= |G|\\ \sum_{i=1}^{r}\dim\alpha_i\cdot\chi_i\left(g\right) &= 0\ \ \forall 1\neq g\in G\end{aligned}$$

היום נראה דוגמאות לכל הדברים הללו.

מסקנה 0.1 לכל חבורה סופית G, כמות ההצגות ממימד 1 הוא $\left|G/G'\right|$.

דוגמאות

1. $G=S_4$. נציג את ההצגות השונות בטבלה:

מחלקות צמידות\הצגות אי פריקות	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
כמות האיברים	1	6	8	6	3
ההצגה הטריוויאלית ־ 1	1	1	1	1	1
הצגת הסימן ־ ε	1	-1	1	-1	1
הצגת סכום אפס ־ π_4	3	1	0	-1	-1
$\pi_4\otimes\varepsilon$	3	-1	0	1	-1
φ	2	0	a	0	b

נקרא להצגה הטבעית של S_n על n־יות על ידי פרמוטציות בתור σ_n. היא מתפרקת בתור $\sigma_n=1\oplus\pi_n$, כאשר π_n היא ההצגה שבה סכום הקואורדינטות הוא 0. נחשב את הכרקטרים:

$$\chi_{\sigma_n}=\chi_1+\chi_{\pi_n}$$

χ_{σ_n} נותנת את כמות נקודות השבת, וכך נחשב את הכרקטר של π_n. לאחר החישוב נוכל לבדוק

$$(\chi_{\pi_n} \mid \chi_{\pi_n}) = \frac{1}{24}\left(3^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 3\right) = 1$$

ולכן זו אכן הצגה אי פריקה.
כדי לבנות את ההצגה φ, ניקח את תת החבורה K, קליין 4, שהמנה בה היא S_3. לחבורה זו כבר יש הצגה דו מימדית, וניתן למשוך אותה אחרת. למצוא את a, b - תרגיל.

2. כעת, $G = S_5$.

מחלקות צמידות\הצגות אי פריקות	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$	(12345)	$(123)(45)$
כמות האיברים	1	10	20	30	15	24	20
1	1	1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1	1	-1
π_5	4	2	1	0	0	-1	-1
$\pi_5 \otimes \varepsilon$	4	-2	1	0	0	-1	1
φ	5	-1	-1	1	1	0	-1
$\varphi \otimes \varepsilon$	5	1	1	-1	1	0	1
τ	6	0	x	0	y	z	0

לחשב את x, y, z - תרגיל.