# הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

29 בדצמבר 2016

## 1 דוגמאות להצגות מושרות

### 1.1 תת חבורות נורמליות

בשיעור שעבר ראינו טענה על תת חבורות נורמליות, וממנה יש מסקנה:

**מסקנה 1.1** אם $A \leq G$ תת חבורה נורמלית ואבלית, אזי המעלה של כל הצגה אי פריקה של $G$ מחלקת את $[G:A]$.

**הוכחה:** באינדוקציה על הסדר של $G$.

במקרה הראשון של הטענה מהשיעור שעבר, $\rho$ מושרית על ידי $\sigma$ של $H$. הנחת האינדוקציה אומרת כי

$$\deg(\sigma) \mid [H:A]$$

אם נכפיל פי $[G:H]$ נקבל

$$\deg(\rho) \mid [G:A]$$

במקרה השני, נגדיר $G' = \rho(G)$, $A' = \rho(A)$. נטען כי

$$[G':A'] \mid [G:A]$$

ואמנם, יהי $K = \ker \rho$, $K_A = \ker \rho |_A = K \cap A$. אזי

$$A' = A/K_A, G' = G/K$$

ולכן

$$[G':A'] = \frac{|G'|}{|A'|} = \frac{|G|\,|K_A|}{|K|\,|A|} = \frac{[G:A]}{[K:K_A]} \mid [G:A]$$

לפי הטענה מהשיעור שעבר, האיברים של $A'$ הן הומותטיות, ולכן $A'$ מוכלת במרכז של $G'$. לפי טענה שראינו בעבר,

$$\dim(\rho) \mid [G':\mathrm{Cent}(G')] \mid [G':A'] \mid [G:A]$$

■

## 1.2 מכפלה חצי ישרה בחבורה אבלית

יהיו $A,H$ תת חבורות של $G$, כאשר $A$ נורמלית ואבלית, וכן $G = A \rtimes H$.
$A$ אבלית, ולכן כל הכרקטרים האי פריקים שלה הם ממעלה 1, והם מהווים חבורה:

$$X = \mathrm{Hom}\left(G, \mathbb{C}^*\right)$$

$G$ פועלת על $X$: אם $\chi \in X, s \in G$ אזי

$$\left(s\chi\right) a = \chi\left(s^{-1}as\right)$$

לכל $a \in A$. $G$ פועלת על $X$, בפרט $H$ פועלת עליה. יהיו $\chi_i$, לכל $i \in X/H$, נציגים של המסלולים. לכל $i \in X/H$ יהי $H_i$ המייצב של $\chi_i$ בתוך $H$. נגדיר

$$G_i = A \cdot H_i \subseteq G$$

אנו מרחיבים את $\chi_i$ מן $A$ על $G_i$ על ידי

$$\chi_i\left(ah\right) = \chi_i\left(a\right)$$

נטען כי זהו כרקטר של $G_i$. משתמשים בהנחה כי $h\chi_i = \chi_i$ עבור $h \in H_i$.

$$\begin{aligned}\chi_i\left(aha'h'\right) &= \chi_i\left(aha'h^{-1}hh'\right) = \chi_i\left(aha'h^{-1}\right) = \chi_i\left(a\right)\cdot\chi_i\left(ha'h^{-1}\right) = \\ &= \chi_i\left(a\right)\cdot\left(h^{-1}\chi_i\right)\left(a'\right) = \chi_i\left(a\right)\cdot\chi_i\left(a'\right) = \chi_i\left(ah\right)\cdot\chi_i\left(a'h'\right)\end{aligned}$$

אז $\chi_i$ הוא כרקטר ממעלה 1 של $G_i$. תהי $\rho$ הצגה אי פריקה של $H_i$. נגדיר הצגה אי פריקה $\tilde{\rho}$ של $G_i$:

$$G_i \twoheadrightarrow H_i \xrightarrow{\rho} GL\left(\cdot\right)$$

כעת,

$$\chi_i \otimes \tilde{\rho}$$

היא הצגה של $G_i$. מכאן נקבל הצגה $\theta_{i,\rho}$ - ההצגה המושרית של $G$.

**טענה 1.2**
1. $\theta_{i,\rho}$ אי פריקה לכל $i$ ולכל $\rho$.
2. אם $\theta_{i,\rho} \cong \theta_{i',\rho'}$, אזי $i = i'$, $\rho = \rho'$.
3. אלה כל ההצגות האי פריקות של $G$.

**הוכחה:**

1. יהי $s \notin G_i = A \cdot H_i$. נגדיר

$$K_s = G_i \cap sG_is^{-1}$$

יש לנו ההצגה $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ של $G_i$. לוקחים שני שיכונים:

$$K_s \hookrightarrow G_i : x \mapsto x, x \mapsto sxs^{-1}$$

נרצה להראות ששתי ההצגות של $K_s$ הן זרות. מספיק לבדוק שהצמצום על $A \subseteq K_s$ הן זרות.
בהצגה הראשונה, $A$ פועלת על ידי $\chi_i$, ובשנייה על ידי $s\chi_i$. $s \notin G_i$, ולכן $s\chi_i \neq \chi_i$, כי $H_i = \mathrm{Stab}\left(\chi_i\right)$. לכן מקריטריון מאקי נקבל כי ההצגה המושרית אכן אי פריקה.

2. נניח כי $\theta_{i,\rho} = \theta_{i',\rho'}$. הצמצום של $\theta_{i,\rho}$ על $A$ מכיל רק כרקטרים במסלול של $\chi_i$, ומכאן נקבל כי המסלול של $\chi_i$, $\chi_{i'}$, ולכן, משום שלקחנו נציגים, $i = i'$.
יהי $W$ מרחב ההצגה של $\theta_{i,\rho}$. יהי $W_i \subseteq W$ תת המרחב המתאים לכרקטר $\chi_i$:

$$W_i = \left\{x \in W \mid \forall a \in A \;\; \theta_{i,\rho}\left(a\right)x = \chi_i\left(a\right)x\right\}$$

כמובן שזהו מרחב ששמור תחת $H_i$, שכן $H_i = \mathrm{Stab}_H\left(\chi_i\right)$.
יהי $U$ מרחב ההצגה של $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ וגם של $\tilde{\rho}$ (כי $\chi_i$ חד־מימדי). יש שיכון של $U$ בתוך $W$, וכן

$$W = \bigoplus_{r \in G/G_i = H/H_i} \rho\left(r\right)W$$

החבורה $A$ פועלת במרחב $U$ על ידי $\chi_i$. אם $r \neq 1 \cdot G_i$ $A$ פועלת על $\rho\left(r\right)U$ על ידי $\rho\left(r\right)\chi_i \neq \chi_i$, שכן $\mathrm{Stab}_G\left(\chi_i\right) = G_i$.
לכן $W_i = U \subseteq W$. לכן $H_i$ פועלת בתוך $W_i$ (כלומר בתוך $U$) על ידי $\rho$. לכן קיבלנו את $\rho$ מתוך $\theta_{i,\rho}$, ולכן יינבע כי $\rho = \rho'$.

3. תהי $\sigma : G \to GL\left(W\right)$ הצגה אי פריקה של $G$. נכתוב

$$\mathrm{Res}_A\sigma = \bigoplus_{\chi \in X} W_\chi$$

בהכרח קיים $\chi$ עבורו $W_\chi \neq 0$. אם $s \in G$ אזי $\sigma\left(s\right)$ מעביר את $W_\chi$ אל $W_{s\chi}$. יהי $i$ מסלול של $G$ בתוך $X$ (שקול למסלול של $H$, שכן $A$ פועלת בטריוויאליות). נבחר $\chi_i$ נציג.
נגדיר $H_i = \mathrm{Stab}_H\left(\chi_i\right)$. כמובן, $H_i$ מעביר את $W_{\chi_i}$ לעצמו. יהי $W_i$ תת מרחב $H_i$ אינווריאנטי אי פריק בתוך $W_{\chi_i}$. נתבונן בחבורה

$$G_i = A \cdot H_i$$

נגדיר את $\rho$ להיות ההצגה של $H_i$ בתוך $W_i$. נקבל כי $G_i$ פועלת בתוך $W_i$ על ידי $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$. נותר רק להראות כי הצגה זו משרה את $\sigma$.
הצמצום של $\sigma$ על $G_i$ מכילה את $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$. אם כן, $\sigma$ מוכלת בתוך $\theta_{i,\rho}$.

■

### 1.3 מחלקות של חבורות סופיות

**הגדרה 1.3** $G$ נקראת פתירה אם קיימת סדרה

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

כאשר כל מנה $G_i/G_{i-1}$ אבלית.

**הגדרה 1.4** חבורה נקראת פתירה ביותר (supersolvable) אם מתקיים אותו תנאי כמו קודם, רק שלכל $i$, $G_i \lhd G$, וכן כל מנה $G_i/G_{i-1}$ היא ציקלית.

**הגדרה 1.5** חבורה נקראת נילפוטנטית אם מתקיים אותו תנאי כמו בהגדרת חבורה פתירה ביותר, רק שלכל $i$, $G_i/G_{i-1} \leq Z\left(G/G_{i-1}\right)$.

יש משפט שאומר כי חבורה נילפוטנטית היא פתירה ביותר, וכן משפט שאומר שכל הצגה אי פריקה של חבורה פתירה ביותר מושרית מהצגה ממימד 1. את אלה נראה בשיעור הבא.