הצגות של חבורות סופיות

ארזים ©

22 בדצמבר 2016

ראינו את הדדיות פרובניוס בשיעור שעבר: בהינתן פונקציית מחלקות ψ על $H \leq G$ ופונקציית מחלקות φ על G, מתקיים

$$\left\langle \psi, \mathrm{Res}\varphi \right\rangle_H = \left\langle \mathrm{Ind}\psi, \varphi \right\rangle_G$$

הערה 0.1 אותה הוכחה מראה גם כי

$$\left(\psi, \mathrm{Res}\varphi\right)_H = \left(\mathrm{Ind}\psi, \varphi\right)_G$$

הערה 0.2 נוסחה שימושית:

$$\mathrm{Ind}\left(\psi \cdot \mathrm{Res}\varphi\right) = \left(\mathrm{Ind}\psi\right) \cdot \varphi$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(\psi \cdot \mathrm{Res}\varphi\right)(s) &= \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} \psi\left(t^{-1}st\right) \cdot \varphi\left(t^{-1}st\right) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} \psi\left(t^{-1}st\right) \varphi(s) \\ &= \frac{1}{h} \left(\sum_{\substack{s \in G \\ t^{-1}st \in H}} \psi\left(t^{-1}st\right) \right) \varphi(s) = \left(\mathrm{Ind}\psi \cdot \varphi\right)(s)\end{aligned}$$

■

הערה 0.3 ראינו בעבר כי

$$\left(\mathrm{Ind}W\right) \otimes E = \mathrm{Ind}\left(W \otimes \mathrm{Res}E\right)$$

ומכאן נקבל

$$\mathrm{Ind}\chi_W \cdot \chi_E = \mathrm{Ind}\left(\chi_W \cdot \mathrm{Res}\chi_E\right)$$

ולכן הנוסחה הקודמת נובעת עבור כרקטרים, אבל כל פונקציית מחלקה היא צירוף לינארי של כרקטרים, ולכן הנוסחה נכונה לכל פונקציות המחלקה.

טענה 0.4 תהי W הצגה אי פריקה של W, E הצגה אי פריקה של G. מספר המופעים של W בצמצום $\mathrm{Res}E$ שווה למספר המופעים של E בהשראה $\mathrm{Ind}W$.

הוכחה: נובע מתוך הדדיות פרובניוס עבור $\psi = \chi_W, \varphi = \chi_E$. ■

1 צמצום

יהיו $H, K \subseteq G$ שתי תת־חבורות, $\rho : H \to GL\left(W\right)$ הצגה של H. נסמן $V = \mathrm{Ind}_H^G\left(W\right)$, ונרצה לדעת מהו $\mathrm{Res}_K\left(V\right)$.

נתבונן בקבוצת הקוסטים הכפולים $K\backslash G/H$. נבחר קבוצת נציגים S לקוסטים הללו. לכל $s \in S$ נגדיר

$$H_s = sHs^{-1} \cap K$$

$H_s \leq K$ תת חבורה, ונגדיר

$$\rho^s\left(x\right) = \rho\left(s^{-1}xs\right) \in GL\left(W\right)$$

כאשר $x \in H_s \subseteq H$. זוהי הצגה של H_s במרחב W_s. כעת נוכל לקבל את ההשרה $\mathrm{Ind}_{H_s}^K \rho^s$, שהיא הצגה של K.

טענה 1.1

$$\mathrm{Res}_K\left(\mathrm{Ind}_H^G W\right) = \bigoplus_{s \in S} \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$$

הוכחה: ראינו בעבר כי

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W = \bigoplus_{x \in G/H} xW$$

כאשר הכוונה היא לנציגים של מחלקות השקילות.

יהי $s \in S$. נגדיר $V\left(s\right)$ את תת המרחב של V שנוצא על ידי xW, כאשר $x \in KsH$. נגדיר גם

$$T_s = \left\{xH \mid x \in KsH\right\}$$

כעת,

$$KsH/H \subseteq G/H$$

נגדיר קבוצת נציגים R_s של T_s בתוך KsH/H. $R_s \subseteq G/H$, ואז

$$T_s = \{rH \mid r \in R_s\}$$

אזי

$$V(s) = \bigoplus_{r \in R_s} rW$$

כמובן מתקיים

$$V = \bigoplus_{s \in S} V(s)$$

והכל משום שאלה הצגות מושרות. כעת, מההגדרה, $V(s)$ שמור תחת K, ולכן $V(s)$ הוא הצגה של K. נרצה להראות כי $V(s)$ K־איזומורפי להצגה $\mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$.
נחשב את תת החבורה של K שאיברים $\{x \in K \mid xsW = sW\}$.

$$xsW = sW \iff s^{-1}xsW = Ws \iff s^{-1}xs \in H$$

אבל $x \in K$, ולכן $x \in sHs^{-1} \cap K = H_s$.
מכאן, המרחב $V(s)$ הוא סכום יש של תת מרחבים xsW עבור $x \in K/H_s$, ולכן

$$V(s) = \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$$

לכן נסיים. ■

הערה 1.2 $V(s)$ תלוי אך ורק בתמונה של s בתוך $K\backslash G/H$, וכך גם $\mathrm{Ind}_{H_s}^K (W_s)$.

1.1 קריטריון אי הפריקות של מקי

ניקח במצב הקודם $K = H$. אזי

$$H_s = sHs^{-1} \cap H$$

ההצגה ρ היא של H במרחב W, ומגדירה $\mathrm{Res}_s(\rho) = \rho\,|_{H_s}$. זו לא ρ^s.

הגדרה 1.3 שתי הצגות V_1, V_2 של חבורה K הן <u>זרות</u> אם $\langle V_1, V_2 \rangle_K = 0$.

טענה 1.4 (קריטריון מקי) תהי (W,ρ) הצגה של תת חבורה H. נגדיר

$$V=\mathrm{Ind}_H^G W$$

אזי V אי פריקה אם ורק אם W אי פריקה, וכן לכל $s\in G\backslash H$, שתי ההצגות ρ^s, $\mathrm{Res}_s(\rho)$ של H_s הן זרות.

הוכחה: ידוע כי V אי פריקה אם ורק אם $\langle V,V\rangle_G=1$. לפי פרובניוס,

$$\langle V,V\rangle_G=\langle \mathrm{Ind}W,V\rangle_G=\langle W,\mathrm{Res}_H V\rangle_H$$

לפי טענה קודמת,

$$\mathrm{Res}_H V=\mathrm{Res}_H\left(\mathrm{Ind}_H^G W\right)=\bigoplus_{s\in H\backslash G/H}\mathrm{Ind}_{H_s}^H\left(\rho^s\right)$$

מקבלים

$$\langle W,\mathrm{Res}_H V\rangle_H=\left\langle W,\bigoplus_{s\in H\backslash G/H}\mathrm{Ind}_{H_s}^H\left(\rho^s\right)\right\rangle_H=\sum_{s\in H\backslash G/H}\left\langle W,\mathrm{Ind}_{H_s}^H\rho^s\right\rangle_H$$

מפרובניוס, השוויון ממשיך:

$$\sum_{s\in H\backslash G/H}\left\langle W,\mathrm{Ind}_{H_s}^H\rho^s\right\rangle_H=\sum_s\langle \mathrm{Res}_{H_s}W,\rho^s\rangle_{H_s}=\sum_s\langle \mathrm{Res}_s(\rho),\rho^s\rangle$$

נסמן $\langle \mathrm{Res}_s(\rho),\rho^s\rangle=d_s$. עבור $s=1$, נקבל

$$d_1=\langle\rho,\rho\rangle_H\geq 1$$

עבור $s\neq 1$ מקבלים $d_s\geq 0$. לכן

$$\sum_{s\in H\backslash G/H}d_s=1$$

אם ורק אם ρ אכן אי פריקה, וכך $d_1=1$, ולכל $s\neq 1$ נקבל $d_s=0$ כי ההצגות זרות.
■

מסקנה 1.5 נניח כי H תת חבורה נורמלית של G. אזי $\mathrm{Ind}_H^G\rho$ אי פריקה אם ורק אם ρ אי פריקה, והיא לא איזומורפית להצגה הצמודה ρ^s לאף $s\notin H$.

הוכחה: $s^{-1}Hs=H$, כלומר $H_s=H$. לכן $\mathrm{Res}_s\rho=\rho$. הצגה זו וגם ρ^s אי פריקות, ולכן זרות, כלומר לא איזומורפיות.
■

2 דוגמאות של הצגות מושרות

2.1 תת חבורות נורמליות

טענה 2.1 תהי A תת חבורה נורמלית של G, ותהי $\rho : G \to GL\left(V\right)$ הצגה אי פריקה. אזי אחד מהבאים נכון:

1. קיימת תת חבורה $A \subseteq H \subsetneq G$ והצגה אי פריקה σ של H כך שההצגה ρ מושרית על ידי σ.
2. הצמצום של ρ על A הוא איזוטיפי (כלומר, סכום ישר של עותקים איזומורפיים של אותה הצגה אי פריקה).

הוכחה: נכתוב

$$V = \bigoplus_i V_I$$

הפירוק הקנוני של $\rho\mid_A$ להצגות איזוטיפיות. כעת, יהי $s \in G$, ותהי (W,θ) הצגה של A. נגדיר הצגה חדשה

$$s * \theta : A \to GL\left(W\right)$$
$$\left(s * \theta\right)\left(t\right) = \theta\left(s^{-1}ts\right)$$

כעת מתקיים

$$s * \left(s' * \theta\right) = \left(ss'\right) * \theta$$

אם $V_i = \bigoplus \theta$, נכתוב $V_i = V_\theta$. כעת,

$$\rho\left(s\right)V_\theta = s * \left(\bigoplus \theta\right) = \bigoplus \left(s * \theta\right) = V_{s*\theta}$$

נטען כי G מתמירה את תת המרחבים V_i. ניקח הצגה η של A בתוך V_i. אזי

$$\eta = \theta \oplus \cdots \oplus \theta$$

ואז V_θ רכיב איזוטיפי של η. יהי $s \in G$. נסתכל על $\rho\left(s\right)V_\theta$. כיצד A פועלת עליו (והאם)? יהי $t \in A$, ויהי $x \in V_\theta$. אזי

$$\rho\left(t\right)\rho\left(s\right)x = \rho\left(s\right)\rho\left(s^{-1}ts\right)x = \rho\left(s\right)\eta\left(s^{-1}ts\right)x$$

כמובן $s^{-1}ts \in A$, ולכן $\rho\left(s^{-1}ts\right) = \eta\left(s^{-1}ts\right)$.

$$\rho\left(s\right)^{-1}\eta\left(t\right)\rho\left(s\right) = \rho\left(s^{-1}ts\right) = \eta\left(s^{-1}ts\right) = \left(s * \eta\right)\left(t\right)$$

ההצגה של A בתוך V_θ $\rho\left(s\right)$ היא איזומורפית להצגה $s*\eta$, וכן

$$s*\eta=s*\left(\bigoplus\theta\right)=\bigoplus\left(s*\theta\right)$$

ולכן מתקיים

$$\rho_sV_\theta=V_{s*\theta}$$

לכן $\rho\left(s\right)$ מתמירה את תת המרכבים V_θ. ∎