הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

15 בדצמבר 2016

טענה 0.1 נתבונן בחוג $\mathrm{Cent}\mathbb{C}[G]$. יהי $u=\sum u(s)s\in\mathrm{Cent}\mathbb{C}[G]$, ונניח שכל האיברים $u(s)$ הם מספרים שלמים אלגבריים. אזי u שלם מעל $\mathbb{Z}$.

הוכחה: יהיו C_i מחלקות הצמידות של G ($i\in\{1,\ldots,h\}$). נגדיר:

$$e_i=\sum_{s\in C_i}s\subseteq\mathbb{Z}[G]\subseteq\mathbb{C}[G]$$

נבחר נציגים $s_i\in C_i$, ואז מתקיים למעשה

$$u=\sum u(s_i)e_i$$

נתון כי $u(s_i)$ שלם מעל $\mathbb{Z}$, ולכן מספיק להראות שכל e_i שלם מעל $\mathbb{Z}$. אבל מתקיים

$$\mathrm{Cent}\mathbb{Z}[G]=\mathbb{Z}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}e_h$$

לכן כל e_i איבר של תת חוג נוצר סופית שמכיל את $\mathbb{Z}[x]$. לכן סיימנו. ■

מסקנה 0.2 תהי ρ הצגה אי פריקה של G ממימד n עם כרקטר χ. אם u כמו בטענה, כלומר כל $u(s)$ שלם אלגברי, אזי המספר

$$\frac{1}{n}\sum_{s\in G}u(s)\chi(s)$$

הוא מספר שלם אלגברי.

הוכחה: זהו למעשה $\omega(u)$, עבור אותו הומומורפיזם

$$\omega:\mathrm{Cent}\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}$$

שמתאים להצגה ρ ראינו זאת בשיעור שעבר. ■

מסקנה 0.3 המעלות של ההצגות האי פריקות של G מחלקות את הסדר של G.

הוכחה: תהי ρ הצגה אי פריקה ממימד n עם כרקטר χ. נפעיל המסקנה הקודמת עבור

$$u = \sum_{s\in G} \chi\left(s^{-1}\right) s$$

כל המקדמים כמובן שלמים אלגבריים. לכן המספר

$$\frac{1}{n}\sum_{s\in G} \chi\left(s^{-1}\right) \chi\left(s\right)$$

הוא שלם אלגברי. נחשב:

$$\frac{1}{n}\sum_{s\in G} \chi\left(s^{-1}\right) \chi\left(s\right) = \frac{|G|}{n}\left\langle \chi,\chi\right\rangle = \frac{|G|}{n}\left(x,x\right) = \frac{|G|}{n}$$

כלומר קיבלנו שהיחס הזה הוא שלם אלגברי, אבל הוא גם רציונאלי. ראינו כבר כי אם מספר רציונאלי הוא שלם אלגברי, אזי הוא בהכרח שלם ־ ולכן היחס הזה שלם. ■

אפשר לתת אפילו עובדה חזקה יותר:

טענה 0.4 אם $A \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית ואבלית, אזי $n \mid [G:A]$.

אנחנו נוכיח מעט פחות:

טענה 0.5 יהי C המרכז של החבורה G. אזי המעלות של כל ההצגות האי פריקות מחלקות את $[G:C]$.

הוכחה: ניקח הצגה אי פריקה $\rho : G \to GL\left(W\right)$ ממימד n. נכתוב $g = |G|$, $c = |C|$. אם $s \in C$ אזי לכל $t \in G$ מתקיים $st = ts$, כלומר

$$\rho\left(s\right)\rho\left(t\right) = \rho\left(t\right)\rho\left(s\right)$$

מלמת שור נקבל כי

$$\rho\left(s\right) = \lambda\left(s\right)\mathrm{Id}$$

נקבל ככה הומומורפיזם

$$\lambda : C \to \mathbb{C}^*$$

ניקח $1 \leq m \in \mathbb{Z}$ ונתבונן בהצגה:

$$\rho^m : G^m \to GL\left(\bigotimes_{i=1}^{m} W\right)$$

מטענות שראינו בעבר, זו הצגה אי פריקה של G^m. נתבונן בתת החבורה $C^m \subseteq G^m$, וניקח בה איבר

$$\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right)$$

שעליו נפעיל את האנלוג של ההעתקה λ ונקבל

$$\lambda\left(s_1\right) \cdots \lambda\left(s_n\right)$$

נתבונן בתת החבורה המרכזית הבאה:

$$H = \left\{\left(s_1, \ldots, s_n\right) \in C \mid s_1 \cdots s_n = 1\right\}$$

אז נקבל הצגה:

$$G^m / H \to W^{\otimes m}$$

(הסימון הוא של מכפלה טנזורית m פעמים). נקבל מהמסקנה הקודמת:

$$n^m \mid \frac{g^m}{c^{m-1}}$$
$$\frac{g^m}{c^{m-1} n^m} \in \mathbb{Z}$$
$$\left(\frac{g}{nc}\right)^m \in \frac{1}{c}\mathbb{Z}$$

וזאת לכל m, כלומר בסך הכל $\frac{g}{nc} \in \mathbb{Z}$, כמו שרצינו לראות. ■

1 הצגות מושרות וקריטריון מאקי

1.1 השראה

בהינתן G סופית, והצגה (V, ρ) של G מעל $\mathbb{C}$, יש לנו פעולה של $\mathbb{C}[G]$ על V:

$$f \cdot x = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s x$$

ולכן V מודול מעל אלגברת החבורה.

בכיוון ההפוך, אם יש מודול V מעל $\mathbb{C}[G]$, אזי מקבלים הצגה של G. לכל $s \in G \subseteq \mathbb{C}[G]$, נוכל להגדיר $s \cdot x$ לפי הפעולה של $\mathbb{C}[G]$.

מעתה, נחליף באופן חופשי בין המושגים של הצגה ושל מודול מעל $\mathbb{C}[G]$.

הערה 1.1 אם $G \subseteq H$ וכן W מודול מעל $\mathbb{C}[H]$, נגדיר $V = \mathrm{Ind}_H^G W$. אם E מודול מעל $\mathbb{C}[G]$ אז קיים איזומורפיזם קנוני:

$$\mathrm{Hom}^H(W,E) \cong \mathrm{Hom}^G(V,E)$$

הוכחה: תהי $f \in \mathrm{Hom}^H(W,E)$, נקרא להצגה של המודול W θ, ולהצגה של המודול E ρ'. אזי מתקיים

$$f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$$

אזי לפי למה שראינו בעבר, אפשר להרחיב את f באופן יחיד להעתקה לינארית

$$F : V \to E$$

כך שמתקיים $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$ לכל $s \in G$. נקבל העתקה

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}^H(W,E) \to \mathrm{Hom}^G(V,E) \\ f \mapsto F\end{gathered}$$

בכיוון ההפוך,

$$F|_W \leftarrow\!\shortmid F$$

■

הערה 1.2 נציין שההערה הזו מכילה משמעות די עמוקה. נסמן Rep_H את קטגוריית ההצגות של H, ובדומה Rep_G. אזי יש לנו פונקטורים:

$$\begin{gathered}\mathrm{Ind} : \mathrm{Rep}_H \to \mathrm{Rep}_G \\ \mathrm{Res} : \mathrm{Rep}_G \to \mathrm{Rep}_H\end{gathered}$$

השראה וצמצום, בהתאמה. אלה פונקטורים צמודים, במובן שלכל $W \in \mathrm{Rep}_H$, $E \in \mathrm{Rep}_G$ יש איזומורפיזם

$$\mathrm{Hom}^G(\mathrm{Ind}W, E) \cong \mathrm{Hom}^H(W, \mathrm{Res}E)$$

הערה 1.3 השראה היא טרנזיטיבית: אם G תת חבורה של חבורה K אזי

$$\mathrm{Ind}_G^K\left(\mathrm{Ind}_H^G\right) \cong \mathrm{Ind}_H^K$$

הוכחה: ניקח קבוצת נציגים R של G/H, וקבוצת נציגים P של K/G. נוכל להגדיר את הקבוצה

$$P \cdot R \subseteq K$$

וזו נותנת קבוצת נציגים של K/H. יש לנו שיכון

$$W \hookrightarrow \mathrm{Ind}_H^G W \hookrightarrow \mathrm{Ind}_G^K \left(\mathrm{Ind}_H^G W\right)$$

ניקח בגורם הימני ביותר את ההצגה להיות ρ, והאחרות יהיו כמובן צמצומים שלה, ונסמן גם אותם ρ (כי זה לא מבלבל בכלל).

$$\sum_{r\in R} \rho_r W = \mathrm{Ind}_H^G W$$

הסכום הוא ישר. כמו כן,

$$\sum_{p\in P} \rho_p \mathrm{Ind}_H^G W = \sum_{p\in P} \rho_p \sum_{r\in R} \rho_r W = \mathrm{Ind}_G^K \left(\mathrm{Ind}_H^G W\right)$$

ושוב, כל הסכומים ישרים. בסך הכל נקבל

$$\sum_{s\in PR} \rho_s W = \mathrm{Ind}_G^K \left(\mathrm{Ind}_H^G W\right)$$

וזהו סכום ישר. כמו כן

$$\sum_{s\in PR} \rho_s W = \mathrm{Ind}_H^K W$$

שכן זו קבוצת נציגים. לכן נקבל את האיזומורפזים שרצינו. ■

טענה 1.4 תהי W הצגה של $H \leq G$. יהי V המרחב הבא:

$$V = \left\{ f : G \to W \mid f\left(h^{-1}x\right) = \theta_h f(x) \right\}$$

ונוכל להגדיר פעולה של G על מרחב זה:

$$(gf)(x) = f(xg)$$

זה נותן הצגה, וזו ההצגה המושרית.

ראינו את הבנייה הזו של ההצגה המושרית בתרגול.

טענה 1.5 יהי V מודול מעל $\mathbb{C}\left[G\right]$ כך שהוא סכום ישר

$$V=\bigoplus_{i\in I}W_i$$

של תת מרחבים ווקטוריים, שאותם G מתמירה טרנזיטיבית. יהי $i_0\in I$, ונסמן $W=W_{i_0}$. נגדיר

$$H=\mathrm{Stab}_G\left(W\right)=\left\{g\in G\mid gW=W\right\}$$

אזי W אינווריאנטי תחת H (ברור), והמודול V הוא מושרה על ידי W.

נשים לב שזו ממש ההגדרה שראינו להצגה המושרית.

הערה 1.6 למעשה V אי פריקה אם ורק אם הפעולה של G על W_iהיא טרנזיטיבית - לכן מספיק למצוא W_i כאלה שאותם G מתמירה. אם הפעולה לא הייתה טרנזיטיבית, סכום ישר של איברי כל מסלול היה נותן תת הצגה.

1.2 הכרקטר של הצגה מושרית, נוסחת ההדדיות של פרובניוס

הגדרה 1.7 תהי $G\subseteq H$. אם f פונקציית מחלקות על H, נגדיר f' על G לפי

$$f'\left(s\right)=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{t\in G\\t^{-1}st\in H}}f\left(t^{-1}st\right)$$

זו נקראת <u>הפונקציה המושרית</u> על ידי f, וכותבים

$$f'=\mathrm{Ind}_H^Gf$$

אם החבורות ברורות, כותבים גם

$$f'=\mathrm{Ind}f$$

טענה 1.8 תהי f פונקציית מחלקות על $H\leq G$.

1. $\mathrm{Ind}f$ היא פונקציית מחלקות על G.
2. אם f היא כרקטר של הצגה W של H, אזי $\mathrm{Ind}f$ היא הכרקטר של $\mathrm{Ind}W$.

הוכחה:

1. נחשב:

$$f'\left(u^{-1}su\right)=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{t\in G\\t^{-1}u^{-1}sut\in H}}f\left(t^{-1}u^{-1}sut\right)=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{v\in G\\v^{-1}sv\in H}}f\left(v^{-1}sv\right)=f\left(s\right)$$

2. ראינו את הנוסחה הזו כבר בהקשר של ההצגה המושרית.

■

בעבר הגדרנו, עבור שתי העתקות $\varphi_1, \varphi_2 : G \to \mathbb{C}$:

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi_1 \left(s^{-1}\right) \varphi_2 (s)$$

אם V_1, V_2 שני מודולים מעל $\mathbb{C}[G]$, נגדיר

$$\langle V_1, V_2 \rangle_G = \dim \mathrm{Hom}^G (V_1, V_2)$$

למה 1.9 אם φ_1 הכרקטר של V_1, φ_2 הכרקטר של V_2, אזי

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G = \langle V_1, V_2 \rangle_G$$

הוכחה: מספיק להתבונן בהצגות אי פריקות (שכן אחרת נפרק לסכום ישר וזה ינבע). במצב זה, נקבל שזה נובע מלמת שור - $\langle V_1, V_2 \rangle_G$ הוא 0 או 1 לפי האם V_1, V_2 איזומורפיות, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G$ באותה צורה מיחסי האורתוגונליות שראינו. ■

כעת תהי $H \leq G$. אם $f : G \to \mathbb{C}$, נסמן $\mathrm{Res} f = f \mid_H$, ואם V הצגה של G נכתוב ResV את ההצגה המצומצמת:

$$H \hookrightarrow G \xrightarrow{\rho} GL(V)$$

משפט 1.10 (הדדיות פרובניוס) אם ψ פונקציית מחלקות על H, φ פונקציית מחלקות על G, אזי

$$\langle \psi, \mathrm{Res}\varphi \rangle_H = \langle \mathrm{Ind}\psi, \varphi \rangle_G$$

הוכחה: נניח כי ψ היא הכרקטר של ההצגה W של H, φ היא הכרקטר של ההצגה E של G. לפי הלמה הקודמת, מספיק להראות כי

$$\dim \mathrm{Hom}^H (W, \mathrm{Res}E) = \langle W, \mathrm{Res}E \rangle_H = \langle \mathrm{Ind}W, E \rangle_G = \dim \mathrm{Hom}^G (\mathrm{Ind}W, E)$$

בשביל זה, מספיק להראות איזומורפיזם:

$$\mathrm{Hom}^H (W, \mathrm{Res}E) \to \mathrm{Hom}^G (\mathrm{Ind}W, E)$$

וראינו את האיזומורפיזם הזה בהערה 1.1. ■