

# הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

24 בנובמבר 2016

## 1 תורת הכרקטרים - המשך

### 1.1 פונקציות מחלקה - המשך

בשיעור שעבר ראינו כמה משפטים. עוד מסקנה מהם היא הטענה הבאה.

**טענה 1.1** תהי  $G$  חבורה סופית מסדר  $g$ , ויהיו  $\chi_i$  הכרקטרים האי פריקים שלה. יהי  $s \in G$  ונסמן בתור  $c(s)$  את גודל מחלקת המידות של  $s$ . אזי:

1.

$$\sum_{i=1}^n \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$$

2. לכל  $t$  שאינו צמוד של  $s$  מתקיים

$$\sum_{i=1}^n \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = 0$$

**הוכחה:** תהי  $f_s$  הפונקציה השווה לאחת על מחלקת הצמידות של  $s$ , ושווה לאפס אחרת. היא פונקציית מחלקות, ולכן ממשפט מהשיעור שעבר נוכל לכתוב

$$f_s = \sum_{i=1}^n (f_s, \chi_i) \chi_i = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n \chi_i \left( \sum_{t \in G} f_s(t) \overline{\chi_i(t)} \right) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^n \chi_i \cdot \overline{\chi_i(s)}$$

לכן

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^n \chi_i(t) \overline{\chi_i(s)}$$

עבור  $t = s$ , מקבלים

$$f_s(s) = 1 = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^n \chi_i(s) \overline{\chi_i(s)}$$

$$\frac{g}{c(s)} = \sum_{i=1}^n \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s)$$

עבור  $t$  שאינו צמוד של  $s$ :

$$f_s(t) = 0 = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^n \chi_i(t) \overline{\chi_i(s)}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \chi_i(t) \overline{\chi_i(s)}$$

■

## 1.2 הפירוק הקנוני של הצגה פריקה

תהי  $G$  חבורה מסדר  $g$ , ותהי  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  יהיו  $W_1, \dots, W_h$  כל ההצגות האי פריקות השונות של  $G$ , בעלות כרקטרים  $\chi_i$  ומימדים  $n_i$ . נוכל לכתוב

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$$

כאשר  $U_i$  כולן אי פריקות. אבל פירוק זה לא יחיד. לעומת זאת, נוכל לכתוב

$$V_i = \bigoplus_{U_j \cong W_i} U_j$$

הגדרה 1.2 הפירוק

$$V = \bigoplus_{i=1}^h V_i$$

נקרא הפירוק הקנוני של הצגה  $V$ .

**משפט 1.3** 1. הפירוק הקנוני הוא יחיד, כלומר הוא לא תלוי בפירוק לאי פריקות שממנו התחלנו.

2. ההטלה  $p_i : V \rightarrow V_i$  לקואורדינטה  $i$  נתונה על ידי הנוסחה:

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho(t)$$

הוכחה: נגדיר

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho(t)$$

לפי טענה שראינו, הצמצום של  $q_i$  על תת הצגה אי פריקה  $W \subseteq V$  אם כרקטר  $\chi$  ממעלה  $n$  הוא הומוטתיה:

$$q_i|_W = \frac{n_i}{n_W} (\chi_i, \chi_W) \text{Id}_W$$

נוכיח את הסקלר: נגדיר עבור פונקציית מחלקות  $f$ ,

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t$$

ראינו גם את ההגדרה הזו כבר, וראינו כי

$$\rho_f = \left( \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi_\rho(t) \right) \text{Id}_V$$

ניקח

$$f(t) = \frac{n_i}{g} \overline{\chi_i(t)}$$

ואז נקבל

$$\rho_f = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \frac{n_i}{g} \overline{\chi_i(t)} \cdot \chi_\rho(t) \text{Id}_V = \frac{n_i}{n} \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \chi_\rho(t) \text{Id}_V = \frac{n_i}{n} (\chi_i, \chi_\rho) \text{Id}_V$$

אם  $\chi \neq \chi_i$  נקבל  $\lambda = 0$  (הסקלר), ואם  $\chi = \chi_i$  נקבל  $\lambda = 1$ . לכן עבור  $x = x_1 + \dots + x_h$  נקבל

$$\begin{aligned} q_i(x_i) &= x_i, q_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i \\ q_i(x) &= x_i \end{aligned}$$

■

ולכן זו אכן ההטלה. ככה הוכחנו גם את היחידות.

**דוגמא** נגדיר  $G = \{1, s\}$ ,  $s^2 = 1$ . יש לה שתי הצגות אי פריקות - הטריטיואלית, וזו שעבורה  $s \rightarrow -1$ . לכל הצגה  $W$  נוכל לכתוב

$$W = W^+ \oplus W^-$$

כאשר  $W^+$  הוא סכום ישר של עותקים של ההצגה הטריטוראלית, ובהתאם  $W^-$ .

$$\begin{aligned} W^+ &= \{x \in W \mid \rho_s x = x\} \\ W^- &= \{x \in W \mid \rho_s x = -x\} \end{aligned}$$

אזי ההטלות הן

$$\begin{aligned} p^+ x &= \frac{1}{2}(x + \rho_s x) \\ p^- x &= \frac{1}{2}(x - \rho_s x) \end{aligned}$$

## 2 תת חבורות, מכפלות והצגות מושרות

### 2.1 חבורות אבליות

תהי  $G$  חבורה אבלית, כלומר לכל  $s, t \in G$  מתקיים  $st = ts$ . מתקיים לכן  $sts^{-1} = t$ , ולכן יש מחלקת צמידות לכל איבר. לכן, כל פונקציה מתוך  $G$  היא פונקציית מחלקה.

**משפט 2.1** התנאים הבאים שקולים:

1.  $G$  אבלית.

2. כל ההצגות האי־פריקות של  $G$  הן ממעלה 1.

**הוכחה:** נסמן  $|G| = g$ , וכן  $n_1, \dots, n_h$  המימדים של ההצגות האי־פריקות של  $G$ . אזי ידוע כי מתקיים

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = g$$

אם  $G$  אבלית, אזי  $h = g$ , ולכן כל  $n_i = 1$ . אם כל  $n_i = 1$ , נובע כי בהכרח  $h = g$ , ולכן  $G$  אבלית - יש מחלקת צמידות לכל איבר. ■

**טענה 2.2** אם  $G$  חבורה אבלית לאו דווקא סופית, אזי כל הצגה אי־פריקה של  $G$  היא ממעלה 1.

**הוכחה:** ברור כי עבור ההצגה  $\rho$  מתקיים לכל  $s, t$ :

$$\rho_s \rho_t = \rho_t \rho_s$$

נקבע  $s$ , אזי  $\rho_s$  מתחלף עם כל  $\rho_t$ . לכן  $\rho_s$  הוא איזומורפיזם של הצגות, ומלמת שור הוא מקיים  $\rho_s = \lambda \cdot \text{Id}_V$ . לכן כל תת מרחב של  $V$  הוא אינווריאנטי לפעולת  $G$ , ולכן אם  $\rho$  אי־פריקה, היא בהכרח ממעלה 1. ■

**מסקנה 2.3** תהי  $A$  תת חבורה אבלית של חבורה  $G$ . נסמן  $|G| = g, |A| = a$ . אזי המעלה של כל הצגה אי פריקה של  $G$  הוא לכל היותר האינדקס של  $A$  בתוך  $G$ ,  $[G : A] = \frac{g}{a}$ .

**הוכחה:** תהי  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  הצגה אי פריקה של  $G$ . נצמצם את  $\rho$  על  $A$ . נקבל הצגה  $\rho_A : A \rightarrow GL(V)$ . תהיי  $W \subseteq V$  תת הצגה אי פריקה של  $A$ . לפי המשפט הקודם,  $\dim W = 1$ .

יהי  $V'$  תת המרחב של  $V$  שנוצר על ידי התמונות  $\rho_s W$  לכל  $s \in G$ . נובע כי  $V' = V$  אינווריאנטי תחת  $G$ , אבל  $V$  אי פריקה, ולכן  $V' = V$ . עבור  $s \in G, t \in A$  מקבלים

$$\rho_{st}W = \rho_s \rho_t W = \rho_s W$$

נבחר  $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{g}{a}}$  נציגים של הקוסטים של  $A$ , ואז לכל  $s \in G$  מתקיים

$$\rho_s W \in \{\rho_{s_1} W, \dots, \rho_{s_{\frac{g}{a}}} W\}$$

כמובן, כל  $\rho_{s_i} W$  ממימד 1, וסכומם הוא כל  $V$  (אולי לא סכום ישר), ולכן

$$\dim V \leq \frac{g}{a}$$

■

**דוגמא** ניקח את החבורה  $D_{2n}$ , ובתוכה את תת החבורה  $C_n$  שהיא אבלית, ונקבל כי כל הצגה אי פריקה של  $D_{2n}$  היא ממימד לכל היותר 2.  $[D_{2n} : C_n] = 2$ .

## 2.2 הצגות של מכפלה ישרה

בהינתן שתי חבורות  $G_1, G_2$ , ניזכר במכפלה הישרה שלהן  $G = G_1 \times G_2$  - שאיבריה הם איברי המכפלה הקרטזית, והכפל בה מתבצע לפי קואורדינטה. ניקח הצגה  $\rho_1 : G_1 \rightarrow GL(V_1)$ , והצגה  $\rho_2 : G_2 \rightarrow GL(V_2)$ . נוכל להגדיר בעזרתן הצגה

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V_1 \otimes V_2) \\ \rho(s_1, s_2) &:= (\rho_1 \otimes \rho_2)(s_1, s_2) = \rho_1(s_1) \otimes \rho_2(s_2) \end{aligned}$$

כמובן מתקיים

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2)$$

אם  $G = G_1 = G_2$ , ניתן לשכך  $G \rightarrow G \times G$  על ידי האלכסון, ואז הצמצום של  $\rho$  על האלכסון נותן הצגה פריקה חדשה של  $G$ .

**משפט 2.4** 1. אם  $\rho_1 : G_1 \rightarrow GL(V_1), \rho_2 : G_2 \rightarrow GL(V_2)$  הצגות אי פריקות, אזי ההצגה  $\rho_1 \otimes \rho_2$  של  $G_1 \times G_2$  היא אי פריקה.

2. כל הצגה אי פריקה של  $G_1 \times G_2$  ניתן להציג כטנזור של הצגות אי פריקות של  $G_1, G_2$ .

הוכחה: מתקיים

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2)$$

ידוע לנו כי

$$\frac{1}{g_i} \sum_{s_i \in G_i} |\chi_i(s_i)|^2 = 1$$

עבור  $i \in \{1, 2\}$  נרצה לחשב את

$$\frac{1}{g_1 g_2} \sum_{s_1, s_2} |\chi_1(s_1) \chi_2(s_2)|^2 = \left( \frac{1}{g_1} \sum_{s_1} |\chi_1(s_1)|^2 \right) \left( \frac{1}{g_2} \sum_{s_2} |\chi_2(s_2)|^2 \right) = 1$$

את החלק השני לא נעשה כאן, אבל ניתן להיווכח כי כל המכפלות האלה שונות, וכי יש לחבורה  $G_1 \times G_2$  כמות מחלקות צמידות שהיא מכפלת הכמות של  $G_1, G_2$ , ומכאן לסיים: אם  $n_i^1$  הם המימדים של ההצגות האי פריקות של  $G_1$ , ובדומה  $n_j^2$ , נקבל

$$\sum_{i,j} (n_i^1 n_j^2)^2 = \left( \sum_i (n_i^1)^2 \right) \left( \sum_j (n_j^2)^2 \right) = g_1 g_2 = |G_1 \times G_2|$$

■

### 2.3 הצגות מושרות

יהי  $H \leq G$  חבורות. כמון, נוכל להגדיר לכל  $s \in G$  את הקוסט שלו,  $sH$ , ואת המנה,  $\frac{|G|}{|H|} = [G : H]$ , שגודלה  $G/H = \{sH \mid s \in G\}$ . תהי  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  הצגה של  $G$ . נתבונן בצמצום על  $H$  של  $\rho$ :

$$\rho_H = \rho|_H : G \rightarrow GL(V)$$

תהי  $W \subseteq V$  תת הצגה של  $\rho_H$ , כלומר תת מרחב יציב תחת פעולת  $H$ . יהי  $s \in G$ . נתבונן במרחב  $\rho_s W$ . אם  $t \in H$  אזי  $\rho_{st} W = \rho_s \rho_t W = \rho_s W$  ולכן נעבור לדבר על  $\sigma \in G/H$ , עבורה נגדיר

$$W_\sigma = \rho_s W, s \in \sigma$$

כמובן שזה לא תלוי בבחירת  $s$ . כמובן,  $G$  פועלת על  $G/H$  על ידי  $\sigma \rightarrow s \cdot \sigma$ . כעת מתקיים

$$\rho_s W_\sigma = \rho_s \rho_{s'} W = \rho_{ss'} W = W_{s\sigma}, s' \in \sigma$$

לכן מקבלים כי  $G$  פועלת על  $\{W_\sigma\}$ . כעת נוכל לכתוב

$$\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma \subseteq V$$

מרחב זה שמור תחת  $G$ , מהנוסחה שראינו לפני רגע:

$$\rho_s W_\sigma = W_{s\sigma}$$

**הגדרה 2.5** אומרים כי ההצגה  $\rho$  של  $G$  במרחב  $V$  מושרית על ידי הצגה  $\theta$  של  $H$  במרחב  $W$  אם מתקיים

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

בפרט, במצב זה, מתקיים

$$\dim V = [G : H] \cdot \dim W$$

נרצה לכתוב את ההגדרה מעט אחרת: לכל  $x \in V$ , ניתן לכתוב באופן יחיד:

$$x = \sum_{\sigma \in G/H} x_\sigma$$

כאשר  $x_\sigma \in W_\sigma$ . לחילופין, אם  $R \subseteq G$  מערכת נציגים של הקוסטים של  $H$ , אזי

$$V = \bigoplus_{r \in R} \rho_r W$$

### דוגמאות

1. ניקח את  $V$  להיות ההצגה הרגולרית של  $G$ , כלומר יש בסיס  $(e_t)_{t \in G}$ , ופעולה

$$\rho_s e_t = e_{st}$$

ניקח את  $W$  להיות המרחב שנפרש על ידי  $(e_t)_{t \in H}$ , עבור תת חבורה  $H \leq G$ . נגדיר את  $\theta$  להיות ההצגה הרגולרית של  $H$  על  $W$ . מההגדרה, ברור כי  $V$  מושרית על ידי  $W$ .

2. עבור  $H \leq G$ , נגדיר את המרחב  $V$  להיפרש על ידי  $(e_\sigma)_{\sigma \in G/H}$ . נגדיר את ההצגה  $\rho$  של  $G$  במרחב  $V$  לפי

$$\rho_s e_\sigma = e_{s\sigma}$$

הצגה זו מושרית על ידי ההצגה הטרייויאלית  $\theta$  של  $H$  במרחב  $W = \mathbb{C} \cdot e_1$ , שוב בבירור מההגדרה.

3. נניח כי  $\rho_1$  של  $G$  מושרית על ידי  $\theta_1$  של  $H$ , וכי  $\rho_2$  מושרית על ידי  $\theta_2$  (גם של  $H$ ,  $G$  בהתאמה). ברור כי  $\rho_1 \oplus \rho_2$  מושרית על ידי  $\theta_1 \oplus \theta_2$ .