הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

10 בנובמבר 2016

בשיעור שעבר ראינו את משפט מאשקה, שמאפשר לנו למצוא משלים אינוריאנטי למרחב אינווריאנטי בהצגה סוף מימדית של חבורה סופית (שגודלה לא מתחלק מציין השדה).

דוגמא

1. ניקח את $G=\mathbb{Z}$ - חבורה אינסופית, ונראה שכאן אין משלים אינווריאנטי לכל תת מרחב אינווריאנטי. נגדיר את $V=\mathbb{C}^2$. לכל $s\in\mathbb{Z}$ נגדיר
$$R_s=\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
תתי המרחבים האינווריאנטיים הם $V,0,\mathbb{C}\cdot e_1$, וברור כי למרחב $\mathbb{C}\cdot e_1$ אין משלים אינווריאנטי.

2. $K=\mathbb{F}_p$, $G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=(\mathbb{F}_p,+)$. נגדיר שוב
$$R_s=\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
תתי המרחבים האינווריאנטיים זהים לדוגמה הקודמת.

הגדרה 0.1 מעל $\mathbb{C}$, הצגה תקרא אוניטרית אם לכל $x,y\in V$ ולכל $s\in G$ מתקיים
$$\langle \rho_s x,\rho_s y\rangle=\langle x,y\rangle$$

נשים לב שכל הצגה איזומורפית להצגה אוניטרית.

בהצגה כלשהי V של חבורה G מעל שדה $\mathbb{K}$ כלשהו, בהינתן $W\subseteq V$ תת מרחב יציב, נוכל להגדיר הצגה על V/W:
$$\rho_s^{V/W}(x+W)=\rho_s x+W$$

במקרה $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, אם ניקח שני משלימים של W, W_1,W_2, נקבל כי
$$W_1\cong V/W\cong W_2$$

כלומר, יכולים להיות משלימים שונים, אבל ההצגה עליהם מוגדרת באופן יחיד, על ידי הצגת המנה.

דוגמא מצב בו יש שני משלימים שונים: ניקח $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $G=\{1\}$, $V=\mathbb{C}^2$. $W=\mathbb{C}\cdot e_1$ מרחב יציב, וכל ישר אחר משלים שלו.

0.1 הצגות אי פריקות

הגדרה 0.2 מעל $\mathbb{C}$, עבור G סופית והצגה V ממימד סופי, V תקרא <u>אי־פריקה</u> אם אין בה תתי מרחבים יציבים.

דוגמא כל הצגה ממימד 1 היא אי פריקה.

משפט 0.3 כל הצגה היא סכום ישר של הצגות אי פריקות.

הוכחה: באינדוקציה על $\dim V$. אם $\dim V=1$, כבר ציינו שהמשפט ברור. עבור $\dim V=n$, אם V אי פריקה, סיימנו. אחרת, קיים לה תת מרחב W ומשלים שלו W' ששניהם ממימד נמוך יותר המקיימים $V=W\oplus W'$. מהנחת האינדוקציה כל אחד מהם הוא סכום של הצגות אי פריקות, ולכן V היא סכום הסכומים הללו. ■

0.2 מכפלה טנזורית של שתי הצגות

ראינו כבר את פעולת הסכום הישר של שתי הצגות, שמתנהגת כמו חיבור. כעת נראה פעולה שמתנהגת כמו כפל.

הגדרה 0.4 יהיו V_1,V_2 מרחבים ווקטוריים. מרחב W עם העתקה

$$\begin{aligned} V_1\times V_2 &\to W \\ (x_1,x_2) &\mapsto x_1\cdot x_2 \end{aligned}$$

ייקרא <u>מכפלה טנזורית</u> של V_1,V_2 אם מתקיים:

1. $x_1\cdot x_2$ היא תבנית בי־לינארית (כלומר לינארית בשני המשתנים).
2. אם $\left\{e_i^1\right\}$ בסיס של V_1 וכן $\left\{e_i^2\right\}$ בסיס של V_2, אזי $\left\{e_i^1\cdot e_i^2\right\}$ בסיס של W.

מרחב זה יסומן $V_1\otimes V_2$.

בתרגול נראה כי מרחב זה תמיד קיים, ויחיד עד כדי איזומורפיזם.

הגדרה 0.5 בהינתן שתי הצגות $\rho_1:G\to GL\left(V_1\right),\rho_2:G\to GL\left(V_2\right)$ של אותה חבורה G, נגדיר הצגה חדשה

$$\begin{aligned} \rho:G &\to GL\left(V_1\otimes V_2\right) \\ \rho_s\left(x_1\cdot x_2\right) &= \rho_s^1\left(x_1\right)\cdot\rho_s^2\left(x_2\right) \end{aligned}$$

כמובן שלא כל ווקטור במכפלה הטנזורית הוא מכפלה, אבל איברי בסיס כן, ולכן זה מגדיר את כל ההצגה. נסמן $\rho_s=\rho_s^1\otimes\rho_s^2$.

0.3 ריבוע סימטרי וריבוע חילופין

יהי V מרחב וקטורי, ויהי $e_1,\ldots,e_n$ בסיס. כעת נגדיר העתקה:

$$\begin{aligned}\theta : V\otimes V &\to V\otimes V\\ \theta\left(e_i\otimes e_j\right) &= e_j\otimes e_i\end{aligned}$$

מהגדרה זו קל לראות כי לכל שני ווקטורים יתקיים

$$\theta\left(v_1\otimes v_2\right)=v_2\otimes v_1$$

ולכן העתקה זו לא תלוייה בבסיס. זוהי למעשה הצגה של C_2.

הגדרה 0.6 למרחב V כלשהו נגדיר את <u>הריבוע הסימטרי</u> ואת <u>ריבוע החילופין</u> של V:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^2\left(V\right) &= \left\{x\in V\otimes V\mid \theta\left(z\right)=z\right\}\\ \mathrm{Alt}^2\left(V\right) &= \left\{x\in V\otimes V\mid \theta\left(z\right)=-z\right\}\end{aligned}$$

טענה 0.7

$$V\otimes V=\mathrm{Sym}^2\left(V\right)\oplus\mathrm{Alt}^2\left(V\right)$$

הוכחה: לכל $x\in V\otimes V$ מתקיים בבירור

$$\begin{aligned}\frac{x+\theta x}{2} &\in \mathrm{Sym}^2\left(V\right)\\ \frac{x-\theta x}{2} &\in \mathrm{Alt}^2\left(V\right)\\ \frac{x+\theta x}{2}+\frac{x-\theta x}{2} &= x\end{aligned}$$

■

ההוכחה עובדת מעל כל שדה שהמציין שלו אינו 2.

בבירור, עבור בסיס $e_1,\ldots,e_n$, $e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i$ הוא בסיס של $\mathrm{Sym}^2\left(V\right)$, עבור $i\leq j$, כלומר המימד הוא $\frac{n^2+n}{2}$. באופן דומה, $e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i$ בסיס של $\mathrm{Alt}^2\left(V\right)$ עבור $i<j$, כלומר המימד הוא $\frac{n^2-n}{2}$.

כמו כן, θ מתחלפת עם $\rho\otimes\rho$ לכל הצגה ρ, ולכן הריבוע הסימטרי וריבוע החילופין הם מרחבים יציבים, ומשלימים זה של זה.

1 תורת הכרקטרים

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $\{e_i\}$. תהי $a : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, עם מטריצה $(a_{i,j})$. נגדיר את העקבה של a על ידי

$$\mathrm{Tr}\left(a\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

זהו למעשה סכום הערכים העצמיים של המטריצה (כולל הריבויים שלהם), ולכן אינו תלוי בבחירת בסיס.

הגדרה 1.2 תהי $\rho : G \to GL\left(V\right)$ הצגה. לכל $s \in G$ נגדיר

$$\chi_{\rho}\left(s\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_s\right)$$

ההעתקה $\chi_{\rho} : G \to \mathbb{C}$ נקראת הכרקטר של ההצגה ρ.

טענה 1.3 אם $a, b : V \to V$ לינאריות, אזי $\mathrm{Tr}\left(ab\right) = \mathrm{Tr}\left(ba\right)$.

את העובדה הזו אנחנו מכירים מאלגברה לינארית.

טענה 1.4 אם χ היא הכרקטר של הצגה ρ ממעלה (מימד) n, אזי:

1. $\chi\left(1_G\right) = n$
2. $\chi\left(s^{-1}\right) = \overline{\chi\left(s\right)}$
3. $\chi\left(tst^{-1}\right) = \chi\left(s\right)$

הוכחה: נוכיח כל סעיף.

1. $\rho\left(1\right) = I_n$, ולכן $\mathrm{Tr}\left(\rho\left(1\right)\right) = n$.
2. ניזכר כי מדובר בחבורה סופית, ולכן לכל איבר בה יש סדר סופי. לכן גם לכל $g \in G$, להעתקה $\rho\left(g\right)$ יש סדר סופי. לכן היא בהכרח לכסינה, עם ערכים עצמיים λ_i שכולם שורשי יחידה, כלומר $\left|\lambda_i\right| = 1$ לכל i, ולכן לכל i מתקיים $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. כעת,

$$\chi\left(\left(s\right)^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_s^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\mathrm{Tr}\left(\rho_s\right)} = \overline{\chi\left(s\right)}$$

3. נגדיר $u = ts, v = t^{-1}$. כעת לכל x, y מתקיים $\chi\left(xy\right) = \chi\left(yx\right)$. כעת $uv = tst^{-1}, vt = s$ וקיבלנו את הנדרש.

■

טענה 1.5 תהיינה $\rho_1 : G \to GL\left(V_1\right), \rho_2 : G \to GL\left(V_2\right)$, ויהיו χ_1, χ_2 הכרקטרים המתאימים. אזי מתקיים:

1. הכרקטר של $\rho_1 \oplus \rho_2$ הוא $\chi_1 + \chi_2$.
2. הכרקטר של $\rho_2 \otimes \rho_2$ הוא $\chi_1 \cdot \chi_2$.

הוכחה:

.1

$$R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}$$

ולכן הטענה ברורה.

.2

$$\begin{aligned} \chi_1(s) &= \sum_{i=1}^{n} r_{i,i}^{(1)}(s) \\ \chi_2(s) &= \sum_{i=1}^{n} r_{i,i}^{(2)}(s) \\ \chi(s) &= \sum_{i,j=1}^{n} r_{i,i}^{(1)} r_{j,j}^{(2)} = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s) \end{aligned}$$

■

טענה 1.6 בהינתן הצגה $\rho : G \to GL(V)$ עם כרקטר χ, נסמן את הכרקטר של $\mathrm{Sym}^2(V)$ בתור $\chi_\sigma^{(2)}$ ואת הכרקטר של $\mathrm{Alt}^2(V)$ בתור $\chi_\alpha^{(2)}$. אזי

$$\begin{aligned} \chi_\sigma^{(2)}(s) &= \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi\left(s^2\right)\right) \\ \chi_\alpha^{(2)}(s) &= \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi\left(s^2\right)\right) \end{aligned}$$

הוכחה: נשים לב שוב שלכל $s \in G$, ρ_s לכסינה. נסמן את ערכיה העצמיים λ_i. אזי

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \sum \lambda_i \\ \chi\left(s^2\right) &= \sum \lambda_i^2 \end{aligned}$$

ניקח בסיס e_i של ווקטורים עצמיים של ρ_s, ואז

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) = \lambda_i \lambda_j e_i \otimes e_j + \lambda_j \lambda_i e_j \otimes e_i$$

לכן נקבל כי

$$\chi_s^{(2)}(s)=\sum_{i\leq j}\lambda_i\lambda_j=\sum\lambda_i^2+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_i\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_i^2\right)=\frac{1}{2}\left(\chi(s)^2+\chi\left(s^2\right)\right)$$

באותו אופן

$$\chi_\alpha^{(2)}(s)=\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_i\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_i\right)^2=\frac{1}{2}\left(\chi(s)^2+\chi\left(s^2\right)\right)$$

■

הגדרה 1.7 יהיו $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ הצגות של G. $f:V_1\to V_2$ היא הומומורפיזם אם לכל $s\in G$ מתקיים

$$f\circ\rho_s^1=\rho_s^2\circ f$$

כלומר הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_s^1} & V_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_s^2]{} & V_2 \end{array}$$

כאשר המעברים כלפי מטה הם על ידי f.

טענה 1.8 (למת שור) מעל $\mathbb{C}$, יהי $f:(V_1,\rho_1)\to(V_2,\rho_2)$ הומומורפיזם של הצגות אי פריקות. אזי:

1. אם ρ_1,ρ_2 אינן איזומורפיות, $f=0$.
2. אם $V_1=V_2,\rho_1=\rho_2$ אזי $f=\lambda\cdot\mathrm{Id}_V$ עבור $\lambda\in\mathbb{C}$ כלשהו.

הוכחה:

1. נניח כי $f\neq 1$, ונוכיח כי f איזומורפיזם. נגדיר

$$W_1=\ker f$$

אזי $W_1\subseteq V_1$ הוא תת מרחב יציב - יהי $x\in W_1$, אזי $f(x)=0$, ולכל $s\in G$ מתקיים $\rho_s^2 f(x)=0$, ולכן גם $f\left(\rho_s^1 x\right)=0$, ולכן $\rho_s^1 x\in\ker f=W_1$.
ניזכר כי V_1 אי פריק, כלומר $W_1=0$ או $W_1=V_1$. אם $W_1=V_1$, אזי $f=0$.
הנחנו שזה לא מתקיים, ולכן $\ker f=W_1=0$, כלומר f חד־חד־ערכית.
כעת, גם $\mathrm{Im}f\subseteq V_2$ תת מרחב יציב (קל לבדוק), ולכן $\mathrm{Im}f=0$ או $\mathrm{Im}f=V_2$.
$\mathrm{Im}f\neq 0$, שכן $f\neq 0$, ולכן $\mathrm{Im}f=V_2$ - כלומר f על. לכן f איזומורפיזם.
כעת, אם ρ_1,ρ_2 אינן איזומורפיות, לא ייתכן כי $f\neq 0$, כי אז f איזומורפיזם.

2. נסמן $V=V_1=V_2$, $\rho=\rho_1=\rho_2$. כעת, $f:V\to V$ לינארית, לכן קיים לה ערך עצמי λ (כי אנחנו מעל המרוכבים). נגדיר

$$f'=f-\lambda \mathrm{Id}_V$$

כעת, $\ker f'\neq 0$, שכן λ ערך עצמי. אבל בבירור f' הוא המומורפיזם של הצגות, ולכן הגרעין הוא תת מרחב יציב. V אי פריקה, לכן הגרעין הוא 0 או V - אבל ראינו שאינו אפס, ולכן $\ker f'=V$, כלומר $f'=0$, ולכן $f=\lambda \mathrm{Id}_V$.

■

נניח כי $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ הצגות אי פריקות של G, שסדרה g.

מסקנה 1.9 תהי $h:V_1\to V_2$ העתקה לינארית כלשהי. נגדיר

$$h^0=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\left(\rho_t^2\right)^{-1}h\rho_t^1$$

אזי:

1. אם ρ_1,ρ_2 אינן איזומורפיות, אזי $h^0=0$.
2. אם $V_1=V_2,\rho_1=\rho_2$, h^0 היא הומותטיה, כלומר $h^0(x)=\lambda x$ עבור

$$\lambda=\frac{1}{\dim V}\mathrm{Tr}\left(h\right)$$

הוכחה:

1. h^0 היא בבירור הומומורפיזם של הצגות, לכן אם ההצגות לא איזומורפיות, מלמת שור, $h^0=0$.
2. שוב מלמת שור ברור כי h^0 הומותטיה. נחשב ונקבל

$$\mathrm{Tr}\left(h_0\right)=\frac{1}{g}\sum\mathrm{Tr}\left(h\right)=\mathrm{Tr}\left(h\right)$$

כאשר הגורמים של ρ_t^1,ρ_t^2 מתבטלים שכן אלה מטריצות דומות, ולכן העקבה שלהן זהה (ידוע מאלגברה לינארית). כעת, תמיד מתקיים $\mathrm{Tr}\left(\lambda\cdot\mathrm{Id}\right)=\lambda n$, ולכן

$$\begin{aligned}\lambda n &= \mathrm{Tr}\left(h\right)\\ \lambda &= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(h\right)\end{aligned}$$

■

ננסח זאת בשפה של מטריצות: נסמן $\rho_t^1=\left(r_{i_1,j_1}\right),\rho_t^2\left(r_{i_2,j_2}\right),h=\left(x_{i,j}\right)$. אזי מגדירים

$$x^0_{i_2,i_1}=\frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2,j_2}\left(t^{-1}\right)x_{j_2,j_1}r_{i_1,j_1}\left(t\right)$$

זו מערכת שבה, במקרה 1 כל המקדמים הם 0, ובמקרה 2, כל המקדמים הם 0 חוץ מאשר כאשר $i_1=i_2,j_1=j_2$, ואז הם $\frac{1}{\dim V}$. ננסח זאת:

מסקנה 1.10 במקרה 1 של מסקנה 1.9, לכל i_1,i_2,j_1,j_2 מתקיים

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2,j_2}\left(t^{-1}\right)r_{j_1,i_1}\left(t\right)=0$$

מסקנה 1.11 במקרה 2 של מסקנה 1.9, לכל i_1,i_2,j_1,j_2 מתקיים

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2,j_2}\left(t^{-1}\right)r_{j_1,i_1}\left(t\right)=\frac{1}{\dim V}\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2}=\begin{cases}\frac{1}{n} & i_1=i_2,j_1=j_2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הערה 1.12 אם $\phi,\psi:G\to\mathbb{C}$, נוכל להגדיר

$$\langle\phi,\psi\rangle=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\phi\left(t^{-1}\right)\psi\left(t\right)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\phi\left(t\right)\psi\left(t^{-1}\right)$$

זו תבנית בי־לינארית סימטרית. תחת נוטציה זו, המסקנות הקודמות מתנסחות בהתאמה בתור

$$\begin{aligned}\left\langle r_{i_2,j_2},r_{j_1,i_1}\right\rangle &= 0\\ \left\langle r_{i_2,j_2},r_{j_1,i_1}\right\rangle &= \frac{1}{n}\delta_{i_2,i_1}\delta_{j_2,j_1}\end{aligned}$$

הערה 1.13 נוכל להניח, על ידי בחירת בסיס מתאימה, כי המטריצות $\left(r_{i,j}\left(t\right)\right)$ הן אוניטריות. אזי נקבל כי $r_{i,j}\left(t^{-1}\right)=r_{i,j}\left(t\right)^*$. כך נקבל כי המסקנות שראינו הן למעשה יחסי אורתוגונליות עבור המכפלה הסקלרית $\langle\phi,\psi\rangle$ שנגדיר בשיעור הבא.