הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

12 בינואר 2017

1 נילפוטנטיות ופתירות ביותר

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרות של חבורות פתירות ביותר ונילפוטנטיות. נעיר שכל תת חבורה וכל חבורת מנה של חבורה נילפוטנטית (בהתאמה פתירה ביותר) היא נילפוטנטית (בהתאמה פתירה ביותר).

טענה 1.1 כל חבורה נילפוטנטית סופית היא פתירה ביותר.

הוכחה: באינדוקציה על $|G|$. נכתוב סדרה נילפוטנטית של G:

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_k = G$$

ניתן להניח כי $G_1 \neq \{e\}$, ואז

$$G_1 \subseteq Z\left(G/\{1\}\right) = Z\left(G\right)$$

ולכן $Z\left(G\right) \neq 1$. ניקח $Z = Z\left(G\right)$, $H = G/Z$. אזי $|H| < |G|$ שכן $|Z| > 1$, וכן H נילפוטנטית כמנה של נילפוטנטית. מהנחת האינדוקציה היא פתירה ביותר. כותבים סדרה פתירה ביותר של H:

$$\{1\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = H$$

נגדיר $\varphi : G \to H$ אפימורפיזם המנה. כעת נגדיר

$$G_i = \varphi^{-1}\left(H_i\right)$$

אז מקבלים סדרה

$$Z = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

כמובן $H_i \lhd H$ ולכן גם $G_i \lhd G$, וכן H_i/H_{i-1} ציקלית, ולכן

$$G_i/G_{i-1} \cong H_i/H_{i-1}$$

גם ציקליות (משפט ההתאמה). Z חבורה אבלית וסופית, ולכן יש סדרה

$$\{1\} = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_m = Z$$

כאשר Z_i/Z_{i-1} ציקלית, וכן $Z_i \subseteq Z = Z(G)$, ולכן $Z_i \lhd G$. אז מקבלים סדרה:

$$\{1\} = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_m = Z = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

וזה מסיים את הצעד. ■

2 הצגות של חבורות פתירות ביותר

למה 2.1 תהי G חבורה פתירה ביותר ולא אבלית. אזי קיימת תת חבורה אבלית ונורמלית של G שלא מוכלת במרכז של G.

הוכחה: יהי C המרכז של G. אזי המנה $H = G/C$ גם היא פתירה ביותר. לכן, יש לה סדרה פתירה ביותר כך שהחבורה H_1 נורמלית וציקלית. אזי המקור של H_1 בתוך G היא תת חבורה נורמלית אבלית ולא מרכזית של G. נקבל

$$G_1 = \varphi^{-1}(H_1)$$

כאשר $H_1 = \langle x \rangle$. ניקח y שהוא מקור כלשהו של x בתוך G_1. אזי נוכל לכתוב כל איבר של G_1 בתור

$$y^k c$$

כאשר $c \in C$. ניקח שני איברים מסויימים:

$$y^p c_1, y^q c_2$$

ואז

$$(y^p c_1)(y^q c_2) = y^p y^q c_1 c_2 = y^q y^p c_2 c_1 = (y^q c_2)(y^p c_1)$$

ולכן G_1 אכן אבלית. שאר התכונות ברורות. ■

משפט 2.2 תהי G חבורה פתירה ביותר. אזי כל הצגה אי פריקה של G מושרית מהצגה ממימד 1.

הוכחה: באינדוקציה על $|G|$. מספיק להתבונן בהצגות ρ נאמנות (כלומר $\ker\rho = \{1\}$).
כעת, אם G אבלית אז אין מה להוכיח, כל הצגה אי פריקה היא ממימד 1.
נניח כי G אינה אבלית. תהי $A \lhd G$ תת חבורה נורמלית אבלית ולא מרכזית. כיוון שההצגה ρ נאמנה, $\rho(A)$ לא במרכז של $\rho(G)$, ולכן קיים איבר $a \in A$ עבורו $\rho(A)$ אינו הומותטיה. לכן ההצגה

$$\mathrm{Res}_A\rho$$

אינה איזוטיפית. לפי טענה שראינו בעבר, נובע כי ρ מושרית על ידי הצגה אי פריקה של $G \subsetneq H$, אשר מכילה את A. על H נוכל להפעיל את הנחת האינדוקציה ולסיים. ■

3 משפט ברנסייד

הגדרה 3.1 תהי (V,ρ) הצגה של חבורה סופית G. נסמן $n = \dim\rho$, χ הכרקטר של ρ. נגדיר

$$Z(\chi) = \{s \in G \mid |\chi(s)| = n\}$$

לכל הצגה מתקיים $1 \in Z(\chi)$.

למה 3.2 יהיו V,ρ,χ,n כמו בהגדרה. נסמן $Z = Z(\chi)$. אזי:

1.
$$Z = \{s \in G \mid \exists\varepsilon \in \mathbb{C}^* \ \ \rho(s) = \varepsilon\mathrm{Id}\}$$

2. Z תת חבורה של G.
3. $\chi|_Z = n\lambda$ כאשר λ עבור איזושהי הצגה ממעלה 1 $\lambda : Z \to \mathbb{C}^*$.
4. $Z/\ker(\rho)$ חבורה ציקלית.
5. $Z/\ker(\rho) \subseteq Z\left(G/\ker(\rho)\right)$.
6. אם ρ אי פריקה, אזי $Z/\ker(\rho) = Z\left(G/\ker(\rho)\right)$.

הוכחה:

1. נכתוב $\rho(s) = \mathrm{diag}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$(מסדר סופי ולכן ניתן ללכסן). כאשר $|\xi_i| = 1$. כמו כן

$$\chi(s) = \sum \xi_i$$

לכן כדי שיתקיים $|\chi(s)| = n$ חייב להתקיים $\xi_i = \varepsilon$ לכל i, כאשר $|\varepsilon| = 1$.

2. נגדיר

$$\lambda : Z \to \mathbb{C}^*$$
$$\rho(s) = \lambda(s)\,\mathrm{Id}$$

כעת,

$$\rho(st) = \rho(s)\,\rho(t) = \lambda(s)\,\lambda(t)\,\mathrm{Id}$$
$$\rho\left(s^{-1}\right) = \lambda(s)^{-1}\,\mathrm{Id}$$

לכן נקבל כי $Z < G$, וכן כי λ הומומורפיזם.

3. נובע מהסעיף הקודם:

$$\chi\mid_Z = n\lambda$$

4. ברור כי $\ker\rho \subseteq Z$, וכן כי

$$\ker(\rho) = \ker(\lambda)$$

לכן, $Z/\ker(\rho) \cong \mathrm{Im}\lambda$. כעת, $\mathrm{Im}\lambda \subseteq \mathbb{C}^*$ תת חבורה סופית של חבורה כפלית של שדה, ולכן $Z/\ker(\rho)$ ציקלית.

5. ברור כי $Z/\ker(\rho) \subseteq \mathbb{C}^* \cdot \mathrm{Id}$, ולכן

$$Z/\ker(\rho) \subseteq Z\left(G/\ker(\rho)\right)$$

6. ρ אי פריקה. יהי $s(\ker\rho) \in Z\left(G/\ker\rho\right)$ אזי $\rho(s) \in \mathrm{Aut}(V,\rho)$, ולכן מלמת שור נקבל $\rho(s) = \varepsilon\mathrm{Id}$ עם $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$, ולכן $s \in Z$.

■

משפט 3.3 (ברנסייד) יהי χ כרקטר אי פריק של G, $\chi = \chi_\rho$, $\dim\rho = n$. יהי $s \in G$, C מחלקת הצמידות של s. נניח כי $\gcd(n,|C|) = 1$. אזי $s \in Z(\chi)$ או $\chi(s) = 0$.

הוכחה: יהי

$$\omega_\rho : \mathrm{Cent}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$$

ההומומורפיזם המתאים להצגה האי פריקה ρ. נסמן

$$e_s = \sum_{t\in C} t \in \mathrm{Cent}(\mathbb{C}[G])$$

לפי טענה שראינו, $\omega_\rho(e_s)$ מספר שלם אלגברי. כמו כן,

$$\omega_\rho(e_s) = \tilde{\rho}(e_s) = \sum_{t\in C} \rho(t)$$

לכן נקבל כי העקבה היא

$$\omega_\rho(e_s)\, n = |C|\, \chi(s)$$

לכן נקבל כי

$$\omega_\rho(e_s) = \frac{|C|\, \chi(s)}{n}$$

מהנתון $\gcd(|C|, n) = 1$, ולכן קיימים שלמים u, v עבורם

$$un + v\,|C| = 1$$

לכן

$$\frac{\chi(s)}{n}(1 - un) = \frac{\chi(s)}{n}\,|C|\, v$$

וזהו מספר שלם אלגברי. לכן $\alpha = \frac{\chi(s)}{n}$ מספר שלם אלגברי. בסך הכל הראינו כי $\omega_\rho(e_s)$ שלם אלגברי.

כעת, ננח כי $s \notin Z(\chi)$, כלומר

$$|\chi(s)| < n$$
$$|\alpha| < 1$$

נרצה להראות כי $\alpha = 0$, ונקבל את הנדרש. יהי m הסדר של s. יהי E שדה הפיצול של $x^m - 1$. כלומר,

$$E = \mathbb{Q}(\zeta)$$

כאשר $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. ברור כי $\alpha \in E$. כעת, $\chi(s)$ הוא סכום של n שורשי יחידה. לכן גם $\sigma(\chi(s))$ עבור $\sigma \in \mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$. לכן

$$|\sigma(\chi(s))| \le n$$

לכן נקבל כי

$$|\sigma(\alpha)| \le 1$$

לכן

$$\left|\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)}\sigma\left(\alpha\right)\right|<1$$

עבור כל $\sigma\in\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$, $\sigma\left(\alpha\right)$ שלם אלגברי (שורש של אותו פולינום שגם α שורש שלו). נגדיר

$$\beta=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)}\sigma\left(\alpha\right)$$

ואז גם β שלם אלגברי. אבל כמובן שלכל $\sigma\in\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ מתקיים $\sigma\left(\beta\right)=\beta$ - ולכן $\beta\in\mathbb{Q}$. יחד, שני הדברים אומרים כי $\beta\in\mathbb{Z}$. אבל, $|\beta|<1$ - ולכן $\beta=0$. לכן קיים $\sigma\in\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ עבורו $\sigma\left(\alpha\right)=0$, ולכן $\alpha=0$ - כלומר $\chi\left(s\right)=0$. ■

משפט 3.4 תהי G חבורה לא אבלית ופשוטה. אזי כל מחלקת צמידות מגודל p^{n}, עבור p ראשוני, היא $\{1\}$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $s\in G$ עבורו $|C\left(s\right)|=p^{a}$, $a\geq1$. תהי ρ הצגה אי פריקה לא טריוויאלית. G פשוטה, ולכן ρ נאמנה. לכן

$$Z\left(\chi\right)=Z\left(G\right)=1$$

לכן $s\notin Z\left(\chi\right)$, כי $s\neq1$.
אם $p\nmid\dim\rho$, אזי

$$\gcd\left(\dim\rho,|C\left(s\right)|\right)=1$$

ולכן נקבל כי $\chi\left(s\right)=0$. אם נמספר את ההצגות האי פריקות χ_{i}, נקבל

$$\sum_{i}n_{i}\chi_{i}\left(s\right)=0$$

כעת,

$$0=\sum_{i}n_{i}\chi_{i}\left(s\right)=1+\sum_{p|n_{i}}n_{i}\chi_{i}\left(s\right)$$

כעת, נגדיר

$$\alpha=\sum_{p|n_{i}}\frac{n_{i}}{p}\chi_{i}\left(s\right)$$

אזי α מספר שלם אלגברים, אבל $p\alpha=-1$, לכן $\alpha=\frac{-1}{p}\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ בסתירה. ■