הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

3 בנובמבר 2016

1 הצגות לינאריות

יהי $\mathbb{K}$ שדה (כמעט תמיד $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{K}$.

הגדרה 1.1 $GL\left(V\right)$ היא חבורת האוטומורפיזמים של V, כלומר איזומורפיזמים $V\to V$.

נבחר בסיס $e_1,\ldots,e_n$ של V, ואז עבור $a\in GL\left(V\right)$ נוכל לכתוב $a=\left(a_{ij}\right)$, כאשר

$$a\left(e_j\right)=\sum_i a_{ij}e_i$$

ומתקיים $\det\left(a\right)\neq0$. כמו כן נסמן

$$GL\left(n\right)\coloneqq GL\left(\mathbb{C}^n\right)$$

בהינתן בסיס, ניתן לזהות את $GL\left(V\right)$ עם $GL\left(\dim V\right)$.
תהי G חבורה סופית, עם איבר יחידה שנסמנו 1 ופעולת כפל $\left(s,t\right)\mapsto st$.

הגדרה 1.2 הצגה לינארית של החבורה G במרחב וקטורי V היא הומומורפיזם

$$\rho:G\to GL\left(V\right)$$

כלומר לכל $s\in G$ אנו משייכים $\rho\left(s\right)\in GL\left(V\right)$ כך שמתקיים

$$\rho\left(st\right)=\rho\left(s\right)\rho\left(t\right)$$

הערה 1.3
1. חייב להתקיים $\rho\left(1\right)=1_V$, כאשר $1_V\in GL\left(V\right)$ היא העתקת הזהות.
2. לכל $s\in G$ חייב להתקיים $\rho\left(s^{-1}\right)=\rho\left(s\right)^{-1}$

הגדרה 1.4 אם קיימת הצגה $\rho:G\to GL\left(V\right)$ אומרים כי V הוא מרחב הצגה או הצגי.

דוגמאות

1. $V=\mathbb{C}^n$, G כלשהי. אזי קיימת ההצגה הטריוויאלית:

$$\rho : s \mapsto 1_V$$

2. $V=\mathbb{C}^n$, $G=\{1,-1\}$,

$$\begin{aligned}\rho(1) &= 1_V\\ \rho(-1) &= -1_V\end{aligned}$$

3. $V=\mathbb{C}^2$, $G=\{1,-1\}$,

$$\begin{aligned}\rho(1) &= 1_{\mathbb{C}^2}\\ \rho(-1) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. $V=\mathbb{C}^2$, $G=\{1,-1\}$,

$$\begin{aligned}\rho(1) &= 1_{\mathbb{C}^2}\\ \rho(-1) &= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

הגדרה 1.5 בהינתן הצגה ρ למרחב V של חבורה G, נסמן $\dim(V)=n$. נאמר כי המימד או המעלה של ρ הוא n.

בהינתן בסיס $e_1,\ldots,e_n$ נוכל לקבל לכל $s\in G$ מטריצה R_s שמייצגת את ההעתקה $\rho(s)$ (לעיתים נסמן גם ρ_s). נסמן בתור $r_{ij}(s)$ את איברי המטריצה R_s. כעת מתקיים

$$r_{ij}(st)=\sum_{k=1}^{n} r_{ik}(s)\cdot r_{kj}(t)$$

1.1 הצגות איזומורפיות

הגדרה 1.6 יהיו $(\rho,V),(\rho',V')$ שתי הצגות של אותה חבורה G. נאמר שההצגות איזומורפיות (דומות, שקולות) אם קיים איזומורפיזם (של מרחבים ווקטוריים) $\tau:V\to V'$ המעביר את ההצגה ρ להצגה ρ', כלומר לכל $s\in G$ מתקיים

$$\tau\rho(s)=\rho'(s)\tau$$

דרך שקולה לתאר זאת היא על ידי הדיאגרמה הקומוטטיבית הבאה:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(s)} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\rho'(s)} & V' \end{array}$$

כאשר החצים מטה הם על ידי τ.

נוכל לכתוב את ρ,ρ' בצורה מטריציונית, כלומר קיימת $T\in GL\left(n\right)$ כך שלכל $R_s,R'_s\in GL\left(n\right)$ מתקיים

$$\begin{aligned} T\cdot R_s &= R'_s\cdot T \\ R'_s &= T^{-1}R_sT \end{aligned}$$

כלומר לכל $s\in G$, R_s,R'_s מטריצות דומות על ידי המטריצה T.

דוגמאות מקרים פרטיים:

1. הצגות ממימד 1: אלה הצגות $\rho:G\to GL\left(1\right)$, אבל מתקיים $GL\left(1\right)\cong\mathbb{C}^{\times}=\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$, כלומר אלה הצגות $\rho:G\to\mathbb{C}^{\times}$. כעת, G סופית, ולכן לכל איבר יש סדר סופי. לכן $\rho\left(s^{|s|}\right)=\rho\left(s\right)^{|s|}=1$, ולכן הצגה זו שולחת את כל איברי G לשורשי יחידה.

2. תהי G חבורה עם $g=\left|G\right|$. יהי V מרחב ממימד g. נבחר בסיס, ונתאים בין כל איבר שלו לאיבר של G: עבור $t\in G$ נסמן את איבר הבסיס שמתאים לו e_t. נגדיר את ההצגה הבאה:

$$\begin{aligned} \rho:G &\to GL\left(V\right) \\ s &\mapsto \rho_s \\ \rho_s:e_t &\mapsto \rho_{st} \end{aligned}$$

3. נניח כי G פועלת על קבוצה סופית X. כלומר הומומורפיזם $\varphi:G\to S_X$, כאשר

$$\varphi\left(g\right):x\mapsto gx$$

וכן $s\left(tx\right)=\left(st\right)x$, $1x=x$ לכל $s,t\in G,x\in X$. כעת, יהי V מרחב ווקטורי עם בסיס $\left\{e_x\right\}_{x\in X}$, כלומר מרחב ממימד $\left|X\right|$. נגדיר את ההצגה ρ על ידי:

$$\begin{aligned} \rho:s &\to \rho_s \\ \rho_s:e_x &\to e_{sx} \end{aligned}$$

נבדוק שזו הצגה. יש למעשה לבדוק רק כי $\rho_{st}=\rho_s\rho_t$. מספיק לבדוק שהן פועלות באותה צורה על איברי הבסיס, כלומר

$$\begin{aligned}\rho_{st}\left(e_x\right) &\overset{?}{=} \rho_s\rho_t\left(e_x\right)\\ \rho_{(st)x} &\overset{?}{=} \rho_s\left(e_{tx}\right)=e_{s(tx)}\end{aligned}$$

והשוויון מתקיים משום שנתונה לנו מראש פעולה. הצגה זו נקראת הצגת התמורות המתאימה לפעולה של G על X.

1.2 תת הצגות

הגדרה 1.7 תהי $\rho : G \to GL\left(V\right)$ הצגה, ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב. W נקרא יציב (אינווריאנטי) תחת G אם לכל $g\in G$,

$$\rho_g\left(W\right)\subseteq W$$

דוגמא בהצגת תמורות של G על X, הווקטור

$$v=\sum_{x\in X}e_x$$

הוא אינווריאנטי לפעולת G, שהיא תמורה של איברי הבסיס. לכן המרחב $\mathbb{C}v$ הוא תת מרחב יציב.

אם W יציב תחת G, אז לכל $x\in W$ מתקיים $\rho_s\left(x\right)\in W$ לכל $s\in G$, ולכן נוכל להגדיר:

$$\rho_s^W:=\rho_s\mid_W$$

נבדוק מה הגרעין של ρ_s^W: יהי $x\in\ker\rho_s^W$, אזי $x\in W$, $\rho_s^W\left(x\right)=0$. לכן $\rho_s\left(x\right)=0$, ואז $x=0$, שכן ρ_s היא איזומורפיזם. לכן לכל $s\in G$, ρ_s^W היא עצמה איזומורפיזם, ולכן קיבלנו הצגה:

$$\rho^W : G\to GL\left(W\right)$$

זאת משום שברור שמתקיים $\rho_{st}^W=\rho_s^W\cdot\rho_t^W$.

הגדרה 1.8 ההצגה ρ^W של G, שמתקבלת מההצגה ρ של G למרחב V שבו W תת מרחב יציב תחת Gת היא תת הצגה של ρ.

1.3 משלים

הגדרה 1.9 במרחב ווקטורי V עם תתי מרחבים W, W', נאמר כי V הוא סכום ישר של W, W' אם כל איבר $x \in V$ ניתן לכתוב באופן יחיד $x = w + w'$, כאשר $w \in W, w' \in W'$. מסמנים $V = W \oplus W'$.

הגדרה זו שקולה לכך שמתקיים $W \cap W' = \{0\}$ וכן $\dim V = \dim W + \dim W'$.

הגדרה 1.10 במצב זה, נאמר כי W' הוא משלים (או משלים ישר) של W במרחב V.

הגדרה 1.11 כאשר $V = W \oplus W'$, נוכל להגדיר הטלה של V על W לאורך W':

$$\begin{aligned} P : V &\to W \\ P(w + w') &= w \end{aligned}$$

במצב זה $\ker P = W'$, $\mathrm{Im} P = W$.

טענה 1.12 בכיוון ההפוך, אם P היא העתקה לינארית $P : V \to V$ כך שמתקיים $P(V) \subseteq W$, וכן $P(x) = x$ לכל $x \in W$, אזי $V = W \oplus \ker P$, וכן P היא הטלה על W.

הוכחה: כיוון שמתקיים $P(x) = x$ לכל $x \in W$, ברור לנו כי $\mathrm{Im} P = W$. כעת, יהי $x \in W \cap \ker P$, אזי $P(x) = x$, אבל $P(x) = 0$, ולכן $x = 0$. לכן $W \cap \ker P = \{0\}$. מנוסחת המימד עבור העתקות לינאריות, ידוע לנו כי

$$\dim V = \dim \mathrm{Im} P + \dim \ker P = \dim W + \dim \ker P$$

לכן קיבלנו כי $V = W \oplus \ker P$. אם $x = k + w$, $k \in \ker P$, $w \in W$, אזי

$$P(x) = w$$

מההגדרה, ולכן P היא אכן הטלה על W. ■

משפט 1.13 תהי $\rho : G \to GL(V)$ הצגה של חבורה סופית G במרחב V. יהי $W \subseteq V$ תת מרחב יציב תחת G. אזי קיים משלים ישר W_0 של W במרחב V, כך שגם W_0 יציב תחת G.

הוכחה: נציג שתי גישות להוכחה.

1. יהי W' משלים ישר כלשהו של W, ותהי P ההטלה על W לאורך W'. כעת נכתוב:

$$P_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t P \rho_t^{-1}$$

זוהי העתקה לינארית. נוכיח כי היא הטלה על W, וכי גרעינה יציב תחת G. מההגדרה, ומכך שנתון כי W יציב תחת G, ברור כי

$$P_0 : V \to W$$

כעת, אם $x \in W$, אזי $\rho_t^{-1}(x) \in W$, ולכן $P\rho_t^{-1}(x) = \rho_t^{-1}(x)$, ולבסוף

$$\rho_t P \rho_t^{-1}(x) = \rho_t\left(\rho_t^{-1}(x)\right) = x$$

לכן

$$P_0(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} \rho_t P \rho_t^{-1}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} x = x$$

לכן P_0 היא אכן הטלה על W לאורך $\ker P_0$. כעת נגדיר $W_0 = \ker P_0$. נרצה לטעון כי P_0 היא G-איווריאנטית, כלומר

$$\rho_s P_0 \rho_s^{-1} = P_0$$

לכל $s \in G$. נבדוק:

$$\begin{aligned}\rho_s P_0 \rho_s^{-1} &= \rho_s\left(\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_t P \rho_t^{-1}\right)\rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_{st} P \rho_{st}^{-1} = \\ &=_{u=st} \frac{1}{|G|}\sum_{u\in G}\rho_u P \rho_u^{-1} = P_0\end{aligned}$$

הראינו כי לכל $s \in G$ מתקיים $\rho_s P_0 = P_0 \rho_s$. יהי $x \in W_0$, אזי $P_0(x) = 0$. לכן

$$\rho_s P_0(x) = 0$$

כעת גם

$$P_0 \rho_s(x) = 0$$

כלומר $\rho_s(x) \in W_0$. לכן, לכל $s \in G$, $\rho_s(W_0) \subseteq W_0$, כלומר W_0 אכן יציב תחת G.

2. ניזכר בהגדרה של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ (נקראת גם מכפלה סקלרית): זו פונקציה

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to V$$

המקיימת:

(א)

$$\begin{aligned}\langle x + x', y\rangle &= \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle \\ \langle \alpha x, y\rangle &= \alpha\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

(ב)

$$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$$

(ג)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\ni\langle x,x\rangle &\geq 0\\ x\neq 0 &\Rightarrow \langle x,x\rangle>0\end{aligned}$$

כעת, בהינתן בסיס $e_1,\ldots,e_n$, נוכל להגדיר את המכפלה הפנימית הבאה:

$$\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{i=1}^{n}y_ie_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$$

בהינתן המכפלה הפנימית הזו, נוכל לייצר אחת חדשה:

$$\langle x,y\rangle_0=\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\langle\rho_s(x),\rho_s(y)\rangle$$

מכפלה פנימית זו היא G-אינווריאנטית. ביחס אליה, ניתן לבחור את המשלים הניצב של W בתור W_0:

$$W_0=W^{\perp}=\{x\in V\mid\forall y\in W\quad\langle x,y\rangle=0\}$$

במצב זה קל לבדוק כי W_0 אכן יציב תחת G.

■

דוגמא ניקח $G=\mathbb{Z}$, ואת ההצגה:

$$s\mapsto\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

במצב זה אין משלים יציב, וההוכחה שהראינו לא עובדת. כל מטריצה מהצורה שלעיל היא כבר בצורת ז'ורדן, ולכן ברור כי יש רק תת מרחב אינווריאנטי אחד שלה (כי יש בה רק בלוק ז'ורדן אחד). לכן לא יכול להיות שיש לו משלים יציב.