הצגות של חבורות סופיות:

הגדרה:

הצגה לינארית של החבורה G במרחב וקטורי V היא הומומורפיזם:

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

כלומר, לכל $s \in G$ אנו משייכים $\rho(s) \in GL(V)$ כך שמתקיים

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

הגדרה:

אם קיימת הצגה $\rho : G \to GL(V)$ אומרים כי V הוא מרחב הצגה או הצגה.

הגדרה:

בהינתן הצגה ρ למרחב V של חבורה G, (נסמן) $\dim(V) = n$.
נאמר כי המימד או המעלה של ρ הוא n.

הגדרה:

יהיו (ρ', V'), (ρ, V) שתי הצגות של אותה חבורה G. נאמר
שההצגות איזומורפיות אם קיים איזומורפיזם (של מרחבים וקטורים)
$\tau : V \to V'$ המעביר את ρ ל- ρ', כלומר, לכל $s \in G$ מתקיים:

$$\tau \rho(s) = \rho'(s) \tau$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho(s)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(s)"] \\ V \arrow[r, "\tau"'] & V' \end{tikzcd}$$

דיאגרמה קומוטטיבית ←

הגדרה:

תהי $\rho : G \to GL(V)$ הצגה, ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב. W נקרא
יציב (אינווריאנטי) תחת G אם לכל $g \in G$:

$$\rho_g(W) \subseteq W$$

הגדרה:

ההצגה $\rho^W := \rho|_W$ של G למרחב V שבו W תת מרחב
יציב תחת G היא תת הצגה של ρ.

משפט:

תהי $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ הצגה של חבורה סופית G במרחב V.
ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב יציב תחת G. אזי קיים
משלים ישר W_0 של W במרחב V, כך ש-W_0 יציב תחת G.

הגדרה:

מעל $\mathbb{C}$, הצגה תקרא אוניטרית אם לכל $x,y \in V$ ולכל
$s \in G$ מתקיים: $\langle \rho_s x, \rho_s y \rangle = \langle x, y \rangle$

☆ כל הצגה איזומורפית להצגה אוניטרית

הגדרה:

מעל $\mathbb{C}$, עבור G סופית והצגה V ממימד סופי, V
תקרא אי פריקה אם אין בה תת מרחבים יציבים.

משפט:

כל הצגה הינה סכום ישר של הצגות אי פריקות.

הגדרה:

יהיו V_1, V_2 מרחבים וקטורים, מרחב W עם העתקה:

$$V_1 \times V_2 \longrightarrow W$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_1 \otimes x_2$$

"יקרא מכפלה טנזורית של V_1, V_2 אם מתקיים:

1) $x_1 \otimes x_2$ הינו תבנית בי לינארית

2) אם $\{e_i^1\}$ בסיס של V_1 וכן $\{e_i^2\}$ בסיס של V_2, אזי
$\{e_i^1 \otimes e_j^2\}$ בסיס של W.

מרחב כזה יסומן $V_1 \otimes V_2$

<u>הגדרה:</u>

בהינתן שתי הצגות $\rho_1 : G\to GL(V_1)$, $\rho_2 : G\to GL(V_2)$ של אותה חבורה G, נגדיר הצגה חדשה:

$$\rho : G \longrightarrow GL(V_1\otimes V_2)$$

$$\rho_s(x_1 x_2) = \rho_s^1(x_1)\otimes\rho_s^2(x_2)$$

<u>הגדרה:</u>

יהי V מרחב וקטורי, ויהיו $e_1,\dots,e_n$ בסיס. כעת נגדיר העתקה:

$$\theta : V\otimes V \to V\otimes V$$

$$\theta(e_i\otimes e_j) = e_j\otimes e_i$$

ונובע ישירות כי $\theta(v_i\otimes v_j) = v_j\otimes v_i$ (זו הצגה של C_2

<u>הגדרה:</u>

למרחב V כלשהו נגדיר את <u>הריבוע הסימטרי</u> ואת <u>ריבוע החילופין</u> של V:

$$Sym^2(V) = \{x\in V\otimes V \mid \theta(x) = x\}$$

$$Alt^2(V) = \{x\in V\otimes V \mid \theta(x) = -x\}$$

<u>טענה:</u>

$$V\otimes V = Sym^2(V)\oplus Alt^2(V)$$

<u>הגדרה:</u>

תהי $\rho: G\to GL(V)$ הצגה. לכל $s\in G$ נגדיר:

$$\chi_\rho(s) = Tr(\rho_s)$$

ההעתקה $\chi_\rho : G\to\mathbb{C}$ נקראת <u>הכרקטר</u> של ההצגה ρ.

<u>טענה:</u>

אם χ הוא הכרקטר של הצגה ρ ממעלה n אזי:

1) $\chi(1_G) = n$

2) $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$

3) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

טענה:

תהיינה: $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ ויהיו χ_1, χ_2
הכרקטרים המתאימים להם, אזי:

1) הכרקטר של $\rho_1 \oplus \rho_2$ הוא $\chi_1 + \chi_2$

2) הכרקטר של $\rho_1 \otimes \rho_2$ הוא $\chi_1 \cdot \chi_2$

טענה:

בהינתן הצגה $\rho : G \to GL(V)$ עם כרקטר χ נסמן את
הכרקטר של $Sym^2(V)$ בתור $\chi_\sigma^{(2)}$ ואת הכרקטר של
$Alt^2(V)$ בתור $\chi_\alpha^{(2)}$ אזי:

$$\chi_\sigma^{(2)}(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi(s^2)\right)$$

$$\chi_\alpha^{(2)}(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi(s^2)\right)$$

הגדרה:

יהיו (V_1, ρ_1) , (V_2, ρ_2) הצגות של G. $f : V_1 \to V_2$ היא
הומומורפיזם אם לכל $s \in G$ מתקיים:

$$f \circ \rho_s^1 = \rho_s^2 \circ f$$

מתקיים הדיאגרמה הקומוטטיבית:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_s^1"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \arrow[d, "f"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_s^2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

טענה (למת שור):

מעל $\mathbb{C}$, יהי $f : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ הומומורפיזם של הצגות
אי פריקות אזי:

1) אם ρ_1, ρ_2 אינן איזומורפיות , $f = 0$

2) אם $\rho_1 \cong \rho_2$ $V_1 \cong V_2$ אזי $f = \lambda Id_V$ עבור $\lambda \in \mathbb{C}$ כלשהו.

3

<u>מסקנה:</u> נניח כי (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) הצגות אי פריקות של G.
תהי $h: V_1 \to V_2$ העתקה לינארית. נגדיר:

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \, \rho_t^1$$

כאשר $g = |G|$. אזי:
1) אם ρ_1, ρ_2 אינן איזומורפיות אז $h_0 = 0$
2) אם $\rho_1 = \rho_2$, $V_1 = V_2$ אז h_0 הוא הומותטיה כלומר

$$h_0(x) = \lambda x, \quad \lambda = \frac{1}{\dim V} Tr(h)$$

<u>הגדרה:</u>
יהיו שתי פונקציות ϕ, ψ מחבורה G מסדר g אל $\mathbb{C}$.
נגדיר:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t) \psi(t^{-1})$$

ומכפלה פנימית:

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t) \overline{\psi(t)}$$

<u>משפט:</u>
1) אם χ כרקטר של הצגה אי פריקה, אזי $(\chi, \chi) = 1$
2) אם χ, χ' כרקטרים של שתי הצגות אי פריקות לא איזומורפיות
אזי $(\chi, \chi') = 0$

<u>משפט:</u>
תהי V הצגה לינארית של G עם כרקטר ϕ. נניח כי V
מתפרק לסכום ישר של העתקות אי פריקות: $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$
בנוסף, תהי W העתקה אי פריקה עם כרקטר χ.
אזי, מספר ההצגות W_i שאיזומורפיות להצגה W הוא
בדיוק (ϕ, χ).

<u>מסקנה:</u>
כמות ההצגות W_i שאיזומורפיות להצגה W אינה תלויה בפירוק.

מסקנה:

שתי הצגות עם אותו כרקטר הן איזומורפיות.

יהיו $W_1, \dots, W_h$ ההצגות האי פריקות של G, ויהיו $\chi_1, \dots, \chi_h$ הכרקטרים שלהם. כל הצגה V של G איזומורפית לסכום הישר $m_1 W_1 \oplus \dots \oplus m_h W_h$ עבור $m_1, \dots, m_h$ כלשהם. הכרקטר ϕ של V הוא $\sum m_i \chi_i$. בנוסף מתקיים:

$$(\phi, \phi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2$$

משפט:

אם ϕ הקרקטר של הצגה $V \neq 0$, אזי (ϕ, ϕ) הוא שלם חיובי וכן $(\phi, \phi) = 1$ אמ"מ V אי פריק.

הגדרה:

יהי V מ"ו תחת $\{e_t\}_{t \in G}$ בסיס של V. נגדיר את ההצגה הרגולרית R: $\rho_s e_t = e_{st}$

טענה:

הכרקטר r_G של R הוא:

$$r_G(t) = \begin{cases} g & t = 1 \\ 0 & t \neq 1 \end{cases}$$

מסקנה:

כל הצגה אי פריקה W_i מופיעה בפירוק ההצגה הרגולרית עם ריבוי השווה למימד שלה n_i

מסקנה:

בתנאי המסקנה מתקיים:

1) $\sum_i n_i^2 = g$

2) אם $1 \neq s \in G$ אזי $\sum_i n_i \chi_i(s) = 0$

הערה:

נניח כי בידינו הצגות אי פריקות של G, $W_1,\dots,W_h$. תנאי הכרחי ומספיק לכך שהן כל ההצגות האי פריקות הוא שסכום ריבועי מימדיהן הוא $|G|$.

הגדרה:

פונקציה $f: G \to \mathbb{C}$ נקראת **פונקציית מחלקה** אם לכל $s \in G$, מתקיים: $f(tst^{-1}) = f(s)$.

טענה:

תהי f פונקציית מחלקה של G, חבורה מסדר g. תהי $\rho: G \to GL(V)$ הצגה לינארית של G. נגדיר העתקה לינארית של V:

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t)\rho_t$$

אם ρ הצגה אי פריקה ממימד n עם כרקטר χ, אזי ρ_f הוא הומותטיה מהצורה $\lambda I d_V$ עבור:

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}(f,\bar{\chi})$$

משפט:

$\chi_1,\dots,\chi_h$ הם בסיס אורתונורמלי של H - מרחב פונקציות המחלקות של G.

משפט:

מספר ההצגות האי פריקות הלא איזומורפיות של חבורה G הוא כמספר מחלקות הצמידות של G.

טענה:

יהי $s \in G$ ונסמן בתור $c(s)$ את כמות האיברים במחלקת הצמידות של s.

1) $$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$$

2) עבור $t \in G$ שאינו צמוד של s, מתקיים $\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = 0$

<u>הגדרה:</u>

תהי $\rho: G \to GL(V)$ הצגה ליניארית של G. יהיו $\chi_1, \dots \chi_h$ הכריקטרים של ההצגות הא״פ $W_1, \dots, W_h$ של G, עם מימדים $n_1, \dots, n_h$. נכתוב $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ פירוק של V להצגות א״פ פריקות. נגדיר:

$$I_i = \{ j \mid U_j \cong W_i \}$$

$$V_i = \bigoplus_{j \in I} U_j$$

נגדיר את הפירוק הקנוני של V להיות:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{h} V_i$$

<u>משפט:</u>

1) הפירוק הקנוני $V = \oplus V_i$ לא תלוי בפירוק המקורי $V = \oplus U_i$

2) ההטלה $p_i: V \to V_i$ נתונה ע״י נוסחה שתלויה רק בחבורה G וההצגה ρ. $\rho: G \to GL(V)$

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho(t)$$

<u>משפט:</u>

התנאים הבאים שקולים:

1) G אבלית סופית

2) כל ההצגות הא״פ של G הם ממעלה 1.

<u>טענה:</u>

אם G חבורה אבלית, לאו דווקא סופית, אזי כל הצגה א״פ של G היא ממעלה 1.

<u>מסקנה:</u>

תהי A תת חבורה אבלית של חבורה G נסמן $|A| = a$, $|G| = g$ אזי המעלה של כל הצגה אי פריקה של G היא לכל היותר האינדקס של A בתוך G, $[G:A] = \frac{g}{a}$

<u>הגדרה:</u>

תהי $G = G_1 \times G_2$, $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$

נגדיר: $\rho : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$

$$\rho(s_1, s_2) = (\rho_1 \otimes \rho_2)(s_1, s_2) = \rho_1(s_1) \otimes \rho_2(s_2)$$

<u>משפט:</u>

1) אם $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$ ו- $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ הצגות אי פריקות אזי ההצגה $\rho_1 \otimes \rho_2$ של $G_1 \times G_2$ היא אי פריקה.

2) כל הצגה אי פריקה של $G_1 \times G_2$ ניתן להציג כטנזור של הצגות אי פריקות ρ_1, ρ_2 של G_1, G_2.

<u>הגדרה:</u>

אומרים כי ההצגה ρ של G במרחב V <u>מושרית</u> ע"י הצגה θ של H במרחב W אם מתקיים:

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

בפרט, מתקיים: $\dim V = [G:H] \dim W$

Scanned by CamScanner