בדידה תרגול 9

עוצמות - סיום

לכל שתי עוצמות A,B: ① $|A\cup B|=|A|+|B|$ אם $A\cap B=\emptyset$

② $|A\times B|=|A|\cdot|B|$

③ $|A^B|=|A|^{|B|}$

תרגיל 1:

לכל עוצמה אין סופית α מתקיים: $\boxed{\alpha+1=\alpha}$

פתרון: תחילה נוכיח כי: $\aleph_0+1=\aleph_0$ ⊛ $\aleph_0+1=|\mathbb{N}^+\cup\{0\}|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

תהא A קב' שעוצמתה $|A|=\alpha$ אין סופית, לכן קיימת $B\subseteq A$ כך ש- $|B|=\aleph_0$.

נשים לב ש- B ו- $A\setminus B$ זרות. לכן:

$$\alpha=|A|=|(A\setminus B)\cup B|=|A\setminus B|+|B|=|A\setminus B|+\aleph_0\overset{⊛}{=}|A\setminus B|+\aleph_0+1=|A\setminus B|+|B|+1=\alpha+1 \quad \blacksquare$$

תרגיל 2:

$\boxed{\aleph_0+\aleph=\aleph}$ ⊛

ניקח $|\mathbb{N}|=\aleph_0$, $|(0,1)|=\aleph$. $\aleph_0+\aleph=|(0,1)\cup\mathbb{N}|$

מצד אחד: $\mathbb{N}\cup(0,1)\subseteq\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\aleph_0+\aleph\le\aleph$

מצד שני: $(0,1)\subseteq\mathbb{N}\cup(0,1)$ $\aleph\le\aleph_0+\aleph$

לפי ק"ש $\aleph_0+\aleph=\aleph$

⊛ אם A אין סופית ואינה בת מניה, ו- B תת קב' של A ($B\subseteq A$) אזי $\boxed{|B\setminus A|=|A|}$

פתרון: נוכיח כי $A\setminus B$ אין סופית, נניח בשלילה שלא אזי: $|A|=\overbrace{|A\setminus B|}^{\text{סופי}}+|B|=\aleph_0$

קיבלנו סתירה, לכן: $|A\setminus B|=|A\setminus B|+\aleph_0=|A\setminus B|+|B|=|A|$

מסקנה נדרשת: $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=\aleph$

תרגיל 3:

① הוכיחו: לכל עוצמה אין סופית α, $\boxed{2^\alpha+2^\alpha=2^\alpha}$.

הוכחה: $2^\alpha+2^\alpha=2^\alpha(1+1)=2\cdot2^\alpha=2^{\alpha+1}=2^\alpha$

② הוכיחו: לכל עוצמה a קיימת עוצמה b כך ש- $a+b=b$

הוכחה: אם a סופית: נבחר $b=\aleph$ וסיימנו

אחרת, נבחר $b=2^a$ לפי קנטור $a<2^a$. במקרה $b\le a+b$ מצד שני:

$a+b\le b+b=2^a+2^a=2^a=b$

③ הוכח/הפרך: $\boxed{2^{\aleph} = \aleph_0^{\aleph}}$

פתרון: הטענה נכונה. מתקיים: $2^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$

לכן: $2^{\aleph} = \aleph^{\aleph} \geq \aleph_0^{\aleph} \geq 2^{\aleph}$ ומקש"ב: $2^{\aleph} = \aleph_0^{\aleph}$

④ הוכח/הפרך: $((\aleph_0)^2)^{\aleph_0} = \aleph_0^{2^{\aleph_0}}$

פתרון: לא נכון. $((\aleph_0)^2)^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph$

אבל $(\aleph_0)^{2^{\aleph_0}} = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph} > \aleph$ לפי קנטור.

⑤ הוכיחו: לכל A,B: $\boxed{|P(A\times B)| = |P(B)^A|}$

$$|P(A\times B)| = 2^{|A\times B|} = 2^{|A|\cdot|B|} = (2^{|B|})^{|A|} = |P(B)|^{|A|} = |P(B)^A| \quad \blacksquare$$

תרגיל 4:

בכיתה הוכחנו: אם A אינסופית ו- B סופית/בת מניה אז: $|A\cup B| = |A|$

הוכיחו: אם A אין סופית, $B\subseteq A$ או בת מניה, ו- $A\setminus B$ אינסופית אז: $|A\setminus B| = |A|$

הוכחה:

כאשר $B\subseteq A$: $|A| = |(A\setminus B)\cup B| = |A\setminus B| + |B|$

אך לפי המשפט, אם $A\setminus B$ היא אין סופית ו- B סופית/בת מניה

$$|(A\setminus B)\cup(B)| = |A\setminus B| + |B| = |A\setminus B|$$

ולכן: $|A\setminus B| = |A|$

$\blacksquare$

המשך בדידה 9:

תרגיל 5:

הוכיחו: לכל שלוש עוצמות a,b,c מתקיים: $\boxed{(a^b)^c = a^{b\cdot c}}$

כלומר לכל A,B,C: $|C\to(B\to A)| = |(B\times C)\to A|$, עד $\mathbb{N}\to A$.

פתרון:

נגדיר $H\in(C\to(B\to A))\to((B\times C)\to A)$ כך: $\lambda f\in(C\to(B\to A)).\lambda b\in B, c\in C.((f(c))(b))$

נוכיח כי H שקילות ע"י מציאת פונק' הופכית H^{-1}:

$$H^{-1}=\lambda g\in((B\times C)\to A).\lambda c\in C.\lambda b\in B.\ g(\langle b,c\rangle)$$

אכן, עבור $f: C\to(B\to A)$:

$$(H^{-1}\circ H)(f) = H^{-1}(H(f)) \overset{\alpha\text{ כלל}}{=} H^{-1}(\lambda b\in B, c\in C.(f(c))(b)) =$$

$$\overset{\beta\text{ כלל}}{=} \lambda y\in C.\lambda x\in B.(\lambda b\in B, c\in C.(f(c))(b))(\langle b,c\rangle) =$$

$$\overset{\beta\text{ כלל}}{=} \lambda y\in C.\lambda x\in B.((f(y))(x) \overset{\eta\text{ כלל}}{=} \lambda y\in C. f(y) \overset{\eta\text{ כלל}}{=} f$$

באותו אופן עבור $g\in B\times C\to A$ מתקיים: $(H\circ H^{-1})(g)=g$

ולכן H פונ' שקילות ו- $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$

תרגיל 6:

הוכיחו: איחוד סופי או בן מניה של קב' סופיות או בנות מניה הוא סופי או בן מניה. כלומר: $(|I|\le\aleph_0 \wedge \forall i\in I. |A_i|\le\aleph_0)\Rightarrow |\bigcup_{i\in I}A_i|\le\aleph_0$

הוכחה:

לכל אינדקס מקב' האינדקסים נבחר פונק' $f_i\in\mathbb{N}\to A_i$ שהיא על. ($\forall i: |A_i|\le|\mathbb{N}|$)

נגדיר פונקציה $G\in I\times\mathbb{N}\to\bigcup_{i\in I}A_i$. נוכיח ש- G היא על הפונקציה. $G=\lambda i\in I, n\in\mathbb{N}. f_i(n)$

אזי יהא $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$. אזי קיים $j\in I$ כך ש- $x\in A_j$. כיוון ש- f_j היא על מ-$\mathbb{N}$ ל-A_j, קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $f_j(k)=x$, לכן $G(j,k)=x$ ו- G על.

לכן: $|\bigcup_{i\in I}A_i| \le |I\times\mathbb{N}| = |I|\cdot|\mathbb{N}| \overset{\text{נתון}}{\le} \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ כנדרש! ■

תרגיל 7:

תהי α עוצמה אין סופית המקיימת שלכל שתי קבוצות A ו-C, אם $A \subseteq C$, $|A| = \alpha$, $|C| > \alpha$

אזי $|C \setminus A| > \alpha$ הוכיחו: ① $\alpha + \alpha = \alpha$

② בהינתן התנאים, $|C \setminus A| = |C|$

הוכחה:

① ברור כי $\alpha + \alpha \geq \alpha$. נניח בשלילה כי $\alpha + \alpha > \alpha$ ולכן קיימות A,B זרות

כך ש- $|A| = |B| = \alpha$ ו- $|A \cup B| = |A| + |B| = \alpha + \alpha > \alpha$. נסמן $C = |A \cup B|$.

מההנחה בשאלה: $|C \setminus A| = |(A \cup B) \setminus A| = |B| \overset{\text{נתון}}{=} \alpha > \alpha$ סתירה. ∎

② נראה תחילה שלכל קבוצה D, אם $|D| > \alpha$ אזי $|D| + \alpha = |D|$.

תהא $E \subset D$ כך ש- $|E| = \alpha$ אזי: $|D| = |D \setminus E| + |E| = |D \setminus E| + \alpha =$

$= |D \setminus E| + \alpha + \alpha \overset{①}{=} |D \setminus E| + |E| + \alpha = |D| + \alpha$ ✓

נבחר $D = C \setminus A$. מההנחה $|C \setminus A| > \alpha$. לכן:

$|C \setminus A| = |C \setminus A| + \alpha = |C \setminus A| + |A| = |C|$ ∎

ומכאן נובע: $|P(\mathbb{R}) \setminus P(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph}$

תרגיל 8:

עבור עוצמה b וקבוצה A, נגדיר ~~$P_b(A)$~~ $P_b(A) = \{X \in P(A) \mid |X| = b\}$,

ונסמן $C(a,b) = |P_b(A)|$ כאשר $a = |A|$. חשבו $C(\aleph, \aleph)$.

פתרון:

תהא $B = P_b(A)$, כאשר $A = \mathbb{R}$. נמצא את $|B|$. $2^{\aleph_0} = \aleph$

$P(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ $A \cup \mathbb{N}$

מצד אחד, $B \subseteq P(\mathbb{R})$ ולכן $|B| \leq 2^{\aleph}$.

מצד שני, נגדיר $H \in P((0,1)) \to B$ ונוכיח שהיא חח"ע. $H = \lambda A \in P((0,1)).\, A \cup (10,11)$

הפונקציה H אכן מחזירה ערכים ב-B. ② יהיו $A_1, A_2 \in P((0,1))$ כך ש- $A_1 \neq A_2$. אזי קיים $y \in (0,1)$

כך ש- $y \in A_2$ אבל $y \notin A_1$. אזי $y \in H(A_2) \setminus H(A_1)$ ~~$y \notin A_2$~~ $\Leftarrow H(A_1) \neq H(A_2)$

ו-H חח"ע. כלומר: $|B| \geq |P((0,1))| = 2^{|(0,1)|} = 2^{\aleph} \Leftarrow$ ממשפט קנטור-ברנשטיין: $|B| = 2^{\aleph}$ ∎