בדידה תרגול 5

פונקציות:

הגדרה: פונקציה f מ-A (התחום) ל-B (הטווח) היא קבוצה חלקית של $A \times B$ המקיימת שלכל $a \in A$ קיים **יחיד** $b \in B$ כך ש- $\langle a,b \rangle \in f$

$$\forall a \in A .\ f(a) = \iota b \in B .\ \langle a,b \rangle \in f$$

כיחסים: f היא יחס מלא וחד ערכי.

הגדרה: התמונה של f: $Imf = \{y \in B \mid \exists x .\ f(x) = y\}$

דוגמאות:

⊛ $g = \lambda x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} .\ ax^2 \Leftarrow g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

⊛ $h = \lambda x \in \mathbb{R} .\ \lambda a \in \mathbb{R} .\ ax^2 \Leftarrow h : \mathbb{R} \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

⊛ $p = \lambda x \in \mathbb{R} .\ \{ax^2 \mid a \in \mathbb{N}\} \Leftarrow p : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$

הגדרה: לקבוצה $U \subseteq A$, $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \leftarrow$ התמונה של U.

הגדרה: המקור של V הינו $f^{-1}(V) = \{a \in A \mid f(a) = v \in V\}$.

הגדרה: $f : A \to B$ היא **על** B אם לכל $b \in B$ קיים מקור ב- f.

הגדרה: $f : A \to B$ היא **חד-חד ערכית** אם $\forall a_1, a_2 \in A .\ (f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2$

כלל β: בהינתן $\lambda x \in A . t$ ובהינתן $a \in A$ מתקיים $(\lambda x \in A . t)(a) = t(a/x)$

כלל η: אם t ביטוי עבור פונקציות ו-x אינו חופשי ב-t. $\lambda x . t(x) = t$

תרגיל 1:

A, B, C קבוצות לא ריקות. $f : A \to B$, $g : B \to C$ הוכיחו/הפריכו:

1. אם f, g על, אז $g \circ f$ על. $\leftarrow$ נכון
2. אם $g \circ f$ חח"ע אזי f חח"ע. $\leftarrow$ נכון
3. אם $g \circ f$ חח"ע אזי f או g חח"ע. $\leftarrow$ לא נכון

תרגיל 2: $f : A \to B$, $g : B \to C$ $\quad g \circ f = \lambda x \in A .\ g(f(x))$

הוכיחו כי ההגדרה מתלכדת עם הרכבת יחסים.

פתרון

<u>פתרון:</u> נסמן ב- $\circ_F$ את הרכבת הפונק' וב- $\circ$ את הרכבת היחסים.

צ"ל: $g\circ_F f=g\circ f$

<u>כיוון 1</u>: ניקח $z\in g\circ_F f$. אזי קיים $x\in A$ כך ש- $z=\langle x,(g\circ_F f)(x)\rangle$

מכאן $z=\langle x,g(f(x))\rangle$. יהא $b\in f(x)\in B$. מהגדרת הפונקציה, $\langle x,b\rangle\in f$

מצד שני $\langle b,g(b)\rangle\in g$.

מהגדרת הרכבת יחסים:
$\langle x,g(b)\rangle\in g\circ f$
$\langle x,g(f(x))\rangle\in g\circ f$
$z\in g\circ f$

כנ"ל כיוון 2.

<u>תרגיל 3:</u>

תהא $f:X\to Y$. נגדיר $F:P(X)\to P(Y)$ כך ש- $F=\lambda A\in P(X).\{f(a)|a\in A\}$

① מצאו את $F(\emptyset)$.

$F(\emptyset)=\{f(a)|a=\emptyset\}=\emptyset$

② הוכיחו/הפריכו: $F(X)\subseteq Y$.

נכון. שימו לב $X\in P(X)$ מתקיים כי: $F(X)=\{f(a)|a\in X\}$

לכל $a\in X$, $f(a)\in Y$ ולכן $F(X)\subseteq Y$.

③ הוכיחו: אם f חח"ע אזי F חח"ע

<u>תרגיל 4:</u>

$f:A\to B$, ו- $U\subseteq A$. $f|_U:U\to B$

תהיינה A,B,C לא ריקות. נגדיר: $H:((B\cup C)\to A)\to((B\to A)\times(C\to A))$

$H=\lambda h\in(B\cup C)\to A.\ \langle h|_B,h|_C\rangle$

① הוכח/הפרך. H חח"ע. ← $\boxed{\text{נכון}}$

תהיינה $h_1,h_2\in(B\cup C)\to A$.

$$H(h_1)=H(h_2)\Leftrightarrow\langle h_1|_B,h_1|_C\rangle=\langle h_2|_B,h_2|_C\rangle\Leftrightarrow(h_1|_B=h_2|_B)\wedge(h_1|_C=h_2|_C)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\forall x\in B.\ h_1(x)=h_2(x))\wedge(\forall x\in C.\ h_1(x)=h_2(x))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall x.\ B\cup C.\ h_1(x)=h_2(x)\Leftrightarrow h_1=h_2\ \blacksquare$$

המשך בדידה תרגיל 5:

תרגיל 4: ② מצא תנאי מספיק והכרחי לכך ש-H היא על $(B\to A)\times(C\to A)$

נוכיח כי H על אמ"ם $B\cap C=\emptyset$ או $|A|=1$.

כיוון 1: נניח $B\cap C=\emptyset$ או $|A|=1$.

* אם $|A|=1$: אז גם $|(B\to A)\times(C\to A)|=1$. לכן H היא הפונ' הקבועה, ובפרט על.

* אם $B\cap C=\emptyset$: יהיו $\langle h_1,h_2\rangle\in(B\to A)\times(C\to A)$

ונגדיר $h=\lambda x\in B\cup C.\begin{cases}h_1(x). & x\in B\\ h_2(x). & x\in C\end{cases}$

הפונ' מוגדרת היטב, כי $B\cap C=\emptyset$, ולכן $H(h)=\langle h|_B,h|_C\rangle=\langle h_1,h_2\rangle$

כיוון 2: נניח ש-H על ונניח בשלילה ש- $B\cap C\neq\emptyset$, וגם $|A|\geq 2$.

יהי $x\in B\cap C$, וגם קיימים $a,b\in A$ כך ש- $a\neq b$.

יהי $\langle h_1,h_2\rangle\in(B\to A)\times(C\to A)$ כך ש- $h_1=\lambda x\in B.a$, $h_2=\lambda x\in C.b$.

אז קיימת $h\in(B\cup C\to A)$ כך ש- $H(h)=\langle h|_B,h|_C\rangle=\langle h_1,h_2\rangle$

כי מצד אחד $h(x)=h_1(x)=a$

מצד שני $h(x)=h_2(x)=b$ בסתירה לכך ש- h פונקציה.