בדידה תרגול 4

<u>הגדרה</u>: עבור הקבוצה של קבוצות F, $\cup F=\{x \mid \exists Z\in F, x\in Z\}$ - איחוד

$\cap F=\{x \mid \forall Z\in F\ x\in Z\}$ - חיתוך

<u>דוגמא</u>: לכל $n\in\mathbb{N}^+$, נגדיר: $A_n=[0,\frac{1}{n})$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} A_n=[0,1)=A_1$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} A_n=\{0\}$

<u>תרגיל 1</u>:

תהא $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ משפחה של קבוצות. נגדיר משפחה נוספת $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ע"י:

① $Y_0=X_0$ ② לכל $n\in\mathbb{N}^+$: $Y_n=X_n\setminus\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}X_k\right)$

(א) <u>הוכיחו</u>: המשפחה (Y_n) היא משפחה של קבוצות זרות.

כלומר לכל $k,m\in\mathbb{N}$, $k\neq m$: $Y_k\cap Y_m=\emptyset$

(ב) <u>הוכיחו</u>: לכל $k\in\mathbb{N}$: $\bigcup_{i=0}^{k}X_i=\bigcup_{i=0}^{k}Y_k$

<u>פתרון</u>:

(א) נקח $a\neq b\in\mathbb{N}$, נניח בשלילה כי קיים $x\in Y_a\cap Y_b$

מכאן: * $x\in Y_a$: $x\in X_a$ ∧ $x\notin\bigcup_{k=0}^{a-1}X_k$

* $x\in Y_b$: $x\in X_b$ ∧ $x\notin\bigcup_{k=0}^{b-1}X_k$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$a>b$. מכאן, $b\leq a-1$ ולכן $\bigcup_{k=0}^{b}X_k\subseteq\bigcup_{k=0}^{a-1}X_k$

ידוע ש- $x\in X_b\Rightarrow x\in\bigcup_{k=0}^{b}X_k$ אבל ידוע גם ש- $x\notin\bigcup_{k=0}^{a-1}X_k$

וזו סתירה לפי הגדרת ההכלה.

(ב) נפתור ע"י הכלה דו כיוונית:

• עבור $k\in\mathbb{N}$, יהא $x\in\bigcup_{n=0}^{k}Y_n$. אזי קיים $0\leq m\leq k$ כך ש- $x\in Y_m$. לכן $x\in X_m$,

מכאן ש- $x\in\bigcup_{n=0}^{k}X_n$.

• עבור $k\in\mathbb{N}$, יהא $x\in\bigcup_{n=0}^{k}X_n$. אזי קיים $0\leq m\leq k$ המינימלי כך ש- $x\in X_m$.

כלומר לכל $m'\in\mathbb{N}$. $x\in X_{m'}\Rightarrow m'>m$. אזי $x\notin\bigcup_{k=0}^{m-1}X_k\Rightarrow x\in Y_m$

ומכאן ש- $x\in\bigcup_{n=0}^{k}Y_n$.

מכפלה קרטזית

הגדרה: הזוג הסדור $\langle a,b\rangle$ הוא הקבוצה $\{\{a\},\{a,b\}\}$

התכונה העיקרית: $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

באופן דומה, נגדיר עבור קבוצות: $A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A, b\in B\}$

תרגיל 2:

לכל A,B,C: $(A\times A)\cup(B\times B)=C\times C \Leftrightarrow ((B\subseteq A)\wedge(A=C))\vee((A\subseteq B)\wedge B=C)$

פתרון:

כיוון 1 ($\Rightarrow$), נניח: $(B\subseteq A\wedge A=C)\vee(A\subseteq B\wedge B=C)$. נטפל במקרה ש- $B\subseteq A\wedge A=C$.

מתקיים $A=C$ וגם $B\subseteq A$. נראה ש- $B\times B\subseteq A\times A$.

$$\langle x,y\rangle\in B\times B \Rightarrow x\in B\wedge y\in B \Rightarrow x\in A\wedge y\in A \Rightarrow (x,y)\in A\times A$$

ואז: $(A\times A)\cup(B\times B)=A\times A=C\times C$ ובדומה מקרה שני.

כיוון 2 ($\Leftarrow$): נניח $(A\times A)\cup(B\times B)=C\times C$

נתחיל בלהראות כי: $C=A\cup B$

$$x\in C \Leftrightarrow \langle x,x\rangle\in C\times C \Leftrightarrow \langle x,x\rangle\in(A\times A)\cup(B\times B) \Leftrightarrow \langle x,x\rangle\in(A\times A)\vee\langle x,x\rangle\in(B\times B)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Leftrightarrow x\in A\cup B$$

כעת, נוכיח ש- $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$. נניח בשלילה כי קיים $a\in A\setminus B$ ו- $b\in B\setminus A$. אזי,

$$(a\in A\cup B)\wedge(b\in A\cup B)\Rightarrow(a\in C)\wedge(b\in C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in C\times C\Rightarrow\langle a,b\rangle\in(\{A,A\}\cup\{B,B\})\Rightarrow(\langle a,b\rangle\in A\times A)\vee(\langle a,b\rangle\in B\times B)$$
$$\Rightarrow(b\in A)\vee(a\in B)\rightarrow$$ סתירה!

קיבלנו מכך הכי: $((A\subseteq B)\vee(B\subseteq A))\wedge(C=A\cup B)\underset{\text{דיסטריבוטיביות}}{\Rightarrow}$

$$((A\subseteq B)\vee(C=A\cup B))\wedge((B\subseteq A)\vee(C=A\cup B))\Rightarrow((A\subseteq B)\vee C=B)\vee(B\subseteq A\vee C=A)\ \blacksquare$$

יחסים

הגדרה: יחס R הוא קב' שכוללת סדורים: $\forall z\in R\ \exists a,b.\ z=\langle a,b\rangle$

כלומר $R\subseteq A\times B$

הגדרה: R יחס, $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle\in R\}$ הוא היחס ההופכי

הגדרה: אם $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$ יחסים: $R\circ S=\{\langle a,c\rangle\in A\times C \mid \exists b\in B.\ \langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in C\}$

המשך בדידה תרגול 4

תרגיל 3:

לכל יחס R, נגדיר $R^* = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R^i$ כאשר: $R^i = \underbrace{R\circ R\circ\ldots\circ R}_{i\ \text{פעמים}}$

(מובטחות פה ההנחות: (1) $R\subseteq A\times A$ (2) הרכבה היא אסוציאטיבית).

עבור $R_< = \{\langle x,y\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid \cancel{x<y}\ \ y=x+1\}$. מהו R^*?

פתרון:

נוכיח טענת עזר: $R^k = \{\langle n,n+k\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$ באינדוקציה על k:

עבור $k=1$ נכון לפי הגדרה. (נניח שהטענה נכונה עבור $k=m$ ונוכיח עבור $k=m+1$:

יהי $\langle a,b\rangle\in R^{m+1} = R^m\circ R$ ⇐ קיים $x\in\mathbb{N}$ כך ש- $\langle a,x\rangle\in R^m$, $\langle x,b\rangle\in R$. מהנחת האינדוקציה $x=a+m$. ומהגדרת היחס: $b=x+1=a+m+1$ ⇐ $R^k\subseteq\{\langle n,n+k\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}$.

כיוון שני: $\langle a,b\rangle\in\{\langle n,n+m+1\rangle\in\mathbb{N}^2\}$ ⇐ $b=n+m+1$. נגדיר $x=a+m$ ונקבל: $b=x+1$ כלומר $\langle x,b\rangle\in R$. מה"א: $\langle a,x\rangle\in R^m$ ⇐ $\langle a,b\rangle\in R^m\circ R=R^{m+1}$ כנדרש!

כעת, יהא $\langle a,b\rangle\in R^*$, קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $\langle a,b\rangle\in R^k$ ולכן $b=a+k$.

⇐ $a<b$ ⇐ $\langle a,b\rangle\in R_<$.

$\langle a,b\rangle\in R_<$ ⇐ $a<b$ ⇐ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $b=a+k$ ⇐ $\langle a,b\rangle\in R^k$ ⇐ $\langle a,b\rangle\in R^*$ ■

הגדרה: $R\subseteq A\times B$ הוא חד ערכי אם:

$$\forall a\in A, b_1,b_2\in B: (\langle a,b_1\rangle\in R)\wedge(\langle a,b_2\rangle\in R)\Rightarrow b_1=b_2$$

תרגיל 4: הוכח/הפרך

1. היחס $R=\{\langle n,y\rangle\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{R}\mid n^2+y^2=5\}$ הוא חד ערכי ⇐ לא! X
2. היחס $R=\{\langle n,y\rangle\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{R}\mid n^2+y^2=1\}$ הוא ח.ע ⇐ כן ✓
3. $R=\{\langle A,B\rangle\mid B=A\cup\{1\}\}$ כיחס מ-$P(\mathbb{N})$ ל-$P(\mathbb{N})$ הוא חד ערכי.

נכון ✓. $\langle A,B_1\rangle\in R$ ⇐ $B_1=A\cup\{1\}$; $\langle A,B_2\rangle\in R$ ⇐ $B_2=A\cup\{1\}$

✓ $B_1=B_2$

4. $R=\{\langle A,B\rangle\mid A=B\setminus\{1\}\}$ - לא נכון!