תרגול 3 בדידה

<u>הגדרה</u>: הקבוצה הריקה $\emptyset$ מוגדרת ע"י: $\forall x\,(x \notin \emptyset)$

שימו ♥: לכל קבוצה A $\emptyset \subseteq A$.

<u>תרגיל 1</u>:

1. לכל 3 קבוצות A,B,C מתקיים: $((A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)) \Rightarrow (A\subseteq C)$ ← $\boxed{\text{טרנזיטיביות}}$

<u>הוכחה</u>: יהיו A,B,C קבוצות. נניח כי $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)$.

יהא $x\in A \Rightarrow x\in B \Rightarrow x\in C \xRightarrow{\text{לכל } x} A\subseteq C$.

2. $A=B \iff A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

<u>הוכחה</u>: $A=B \iff \forall x\,((x\in A)\leftrightarrow(x\in B)) \iff \forall x\,(((x\in A)\to(x\in B))\wedge((x\in B)\to(x\in A)))$

$\iff (\forall x\,(x\in A)\to(x\in B))\wedge(\forall x\,(x\in B)\to(x\in A)) \iff A\subseteq B \wedge B\subseteq A$ ■

<u>תרגיל 2</u>:

* $\emptyset\in\emptyset$ ✗
* $\emptyset\subseteq\emptyset$ ✓
* $\emptyset\in\{\emptyset\}$ ✓
* $\{\{a\},b\}=\{\{c\},d\} \iff (a=c)\wedge(b=d)$ ✗ למשל: $a=1,\ b=\{2\},\ c=2,\ d=\{1\}$

קבוצת החזקה:

<u>הגדרה</u>: בהינתן קבוצה A, קבוצת החזקה שלה $P(A)$ מוגדרת כך:

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$$

<u>תרגיל 3</u>:

1. לכל קבוצה A, ל-$P(P(A))$ ול-$P(P(P(A)))$ יש לפחות 2 איברים משותפים.

<u>פתרון</u>: ראינו שלכל קב' X, $\emptyset\subseteq X$.

$P(A)$ היא קבוצה $\Rightarrow \emptyset\subseteq P(A) \Rightarrow \emptyset\in P(P(A))$

$P(P(A))$ היא קבוצה $\Rightarrow \emptyset\subseteq P(P(A)) \Rightarrow \emptyset\in P(P(P(A)))$

מכך ש- $\emptyset\in P(A)$ (כי A קבוצה) נובע ש- $\{\emptyset\}\subseteq P(A) \Rightarrow \{\emptyset\}\in P(P(A))$

מכך ש- $\emptyset\in P(P(A))$ נובע ש- $\{\emptyset\}\subseteq P(P(A)) \Rightarrow \{\emptyset\}\in P(P(P(A)))$

$\Downarrow$

מצאנו שני איברים כאלו: $\emptyset,\ \{\emptyset\}$.

② הוכח כי לכל 2 קבוצות A,B מתקיים: $P(A)\subseteq P(B) \Leftrightarrow A\subseteq B$

הוכחה:

$\boxed{\text{כיוון 1}}$ נראה ש- $(P(A)\subseteq P(B) \Leftarrow A\subseteq B)$

יהא $P(A)\subseteq P(B) \Leftarrow X\in P(B) \overset{\text{מההנחה+טרנזיטיביות}}{\Leftarrow} X\subseteq B \Leftarrow X\subseteq A \Leftarrow X\in P(A)$.

$\boxed{\text{כיוון 2}}$ נראה ש- $(P(A)\subseteq P(B) \Rightarrow A\subseteq B)$

יהא $x\in B \Leftarrow \{x\}\subseteq B \Leftarrow \{x\}\in P(B) \overset{\text{הנחה}}{\Leftarrow} \{x\}\in P(A) \Leftarrow \{x\}\subseteq A \Leftarrow x\in A$ ■

פעולות על קבוצות:

הגדרה: איחוד: $\forall x(x\in(A\cup B)) \Leftrightarrow (x\in A)\vee(x\in B)$

חיתוך: $\forall x(x\in(A\cap B)) \Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\in B)$

הפרש: $\forall x(x\in(A\setminus B)) \Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(x\notin B))$

הפרש סימטרי: $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

הגדרה: משלים: לכל קב' A: $\bar{A} = E\setminus A$

תכונות בסיסיות:

קומוטטיביות: לכל A,B: $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$

אסוציאטיביות: לכל A,B,C: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

דיסטריבוטיביות: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

דה מורגן: לכל A,B: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$, $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

תרגיל 4:

① הוכח: $A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

הוכחה: לכל x: $x\in A\cup(B\cap C) \overset{\text{הגדרה}}{\Leftrightarrow} (x\in A)\vee(x\in(B\cap C)) \overset{\text{הגדרה}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (x\in A)\vee((x\in B)\wedge(x\in C)) \overset{\text{דיסטר'}}{\Leftrightarrow} ((x\in A)\vee(x\in B))\wedge((x\in A)\vee(x\in C)) \Leftrightarrow$

$\overset{\text{הגדרה}}{\Leftrightarrow} (x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C) \overset{\text{הגדרה}}{\Leftrightarrow} x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

② הוכח: לכל A,B: $A=B \Leftrightarrow \forall C(A\cup C=B\cup C)$

הוכחה: $\boxed{\Leftarrow}$ נניח כי לכל C, $A\cup C=B\cup C$. בפרט, $C=\emptyset$, נקבל $A\cup\emptyset=B\cup\emptyset$

כלומר $A=B$ כנדרש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח כי $A=B \Leftarrow$ לכל C: $A\cup C=B\cup C$ ■

המשך תרגול 3 בדידה:

③ הוכח: $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

הוכחה:

$x\in A\triangle B \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\Leftrightarrow(x\in A\setminus B)\lor(x\in B\setminus A)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow((x\in A)\land(x\notin B))\lor((x\in B)\land(x\notin A))\overset{\text{דיסטרב׳}}{\Leftrightarrow}((x\in A)\lor((x\in B)\land(x\notin A)))\land((x\notin B)\lor((x\in B)\land(x\notin A)))$

$\Leftrightarrow(((x\in A)\lor(x\in B))\land((x\in A)\lor(x\notin A)))\land(((x\notin B)\lor(x\in B))\land((x\notin B)\lor(x\notin A)))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(((x\in A)\lor(x\in B))\land T)\land(T\land((x\notin B)\lor(x\notin A)))\Leftrightarrow((x\in A)\lor(x\in B))\land((x\notin B)\lor(x\notin A))$

$\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\land((\neg(x\in B))\lor(\neg(x\in A)))\overset{\text{דה מורגן}}{\Leftrightarrow}(x\in A\cap B)\land\neg((x\in B)\land(x\in A))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\land(x\notin A\cap B)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ ■

④ הוכח: לכל הקבוצות A,B,C $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$

הוכחה: $A\setminus(B\cup C)=A\cap\overline{B\cup C}\overset{\text{דה מורגן}}{=}A\cap(\bar B\cap\bar C)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}(A\cap\bar B)\cap\bar C=$

$=(A\setminus B)\cap\bar C\overset{X\setminus Y=X\cap\bar Y}{=}(A\setminus B)\setminus C$ ■

תרגיל 5

האם לכל A,B מתקיים: $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$? לא (דוגמה: $A=\{1\}, B=\{2\}$)

הוכח: תנאי מספיק והכרחי לקיום השוויון: $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ נ״ח כי $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$. נ״ח כלת כי $A\subseteq B$. נבחר $X\in P(A)$

$\Leftarrow X\subseteq A \Leftarrow X\subseteq B \Leftarrow X\in P(B)$. קיבלנו כי $P(A)\subseteq P(B)$.

מכיוון ש- $A\cup B=B$ קיבלנו: $P(A\cup B)=P(B)\underset{P(A)\subseteq P(B)\text{ כי}}{=}P(B)\cup P(A)$ כנדרש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נ״ח כי $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$. נ״ח בשלילה ש- $\neg(A\subseteq B\lor B\subseteq A)$.

מכאן שקיימים $a\in A\setminus B$ ו- $b\in B\setminus A$. קיבלנו ש- $\{a,b\}\subseteq A\cup B$

מכאן ש- $\{a,b\}\in P(A\cup B)$. אבל גם ש- $\{a,b\}\not\subseteq A\Rightarrow\{a,b\}\notin P(A)$

וגם $\{a,b\}\not\subseteq B\Rightarrow\{a,b\}\notin P(B)\Rightarrow\{a,b\}\notin P(A)\cup P(B)$ בסתירה להנחה. ■