24/10/13

בדידה - תרגול 2

גרירה לוגית:

<u>הגדרה</u>: יהיו $A_1,\dots A_n$ טענות. נאמר ש-B נובעת מ-$A_1,\dots A_n$ אם $(A_1\wedge\dots\wedge A_n)\to B$ טאוטולוגיה. ונסמן $A_1,\dots A_n\vdash B$.

<u>תרגיל 1</u>: האם המסקנה "אם פתרון בדרכי שלום אינו אפשרי אז תהיה מלחמה" נובעת לוגית מההנחות הבאות:
① תהיה מלחמה אם הקפאון "ימשך וגם המעצמות תמשכנה לדון.
② אם הקפאון לא "ימשך או המעצמות לא תמשכנה לדון אז הפתרון בדרכי שלום אפשרי.

<u>פתרון</u>: נסמן
A- פתרון בדרכי שלום אפשרי
B- תהיה מלחמה
C- הקפאון "ימשך
D- המעצמות תמשכנה לדון.

$\Leftarrow$ הנחה ①: $(C\wedge D)\to B$

הנחה ②: $((\neg C)\vee(\neg D))\to A$

האם נובע: $\neg(A)\to B$ כלומר:

$$\alpha=\overbrace{\underbrace{((C\wedge D)\to B)}_{P_1}\wedge\underbrace{((\neg C)\vee(\neg D)\to A)}_{P_2}}^{P}\to\overbrace{((\neg A)\to B)}^{q}$$

נוכיח כי α טאוטולוגיה ובכך נוכיח כי המסקנה נובעת מההנחות.

נניח בשלילה שהמסקנה לא נובעת: אז P הוא T, ו-q הוא F.

מכיוון ש-q הוא F, אז A הוא F ו-B הוא F.

מכיוון ש-P הוא T, P_1 הוא T וגם P_2 הוא T.

P_1 הוא T לכן בהכרח $C\wedge D$ הוא F (כי B - F).

P_2 הוא T, לכן C ו-D הם T. $\Leftarrow$ סתירה ■

<u>תרגיל 2</u>: האם הפסוק $B\to C$ נובע לוגית מהפסוקים $A\to B$ ו- $A\to C$?

<u>פתרון</u>: $\alpha=((A\to B)\wedge(A\to C))\to(B\to C)$ נב.ת $A=F$, $B=T$, $C=F$

ונקבל $\alpha=F$ $\Leftarrow$ α אינה טאוטולוגיה $\Leftarrow$ המסקנה <u>אינה</u> נובעת לוגית משתי הטענות.

כמתים:

מורכבים ממשתנים (מעל עולם הדיון) ומפרדיקטים - תכונות המקבלות משתנים ומחזירות T או F.

<u>דוגמאות</u>: ① $\forall x.(x\geq -2)$ הפסוק הוא "אמת" מעל הטבעיים ו"שקר" מעל הממשיים
② $\forall y\,\exists x.(x+x=y)$ מעל הממשיים. <u>אמת</u> - נבחר $x=\frac{y}{2}$.
③ $\forall x\,(A\vee(\neg A))$, תמיד אמת.

החלפת סדר כמתים:

- $\forall x\forall y.P \equiv \forall y\forall x.P$
- $\exists x\exists y.P \equiv \exists y\exists x.P$

שלילת כמתים:

- $\neg(\forall x.P) \equiv \exists x.(\neg P)$
- $\neg(\exists x.P) \equiv \forall x.(\neg P)$

תרגיל 3:

① מצאו את ערך האמת של הפסוק הבא, כאשר עולם הדיון הוא המס' השלמים:

$$\exists x(\forall y(y<x))$$

פתרון: "שקר". נניח בשלילה שקיים x כזה - x_0. יהא $y_0=x_0$

וקיבלנו כי y_0 לא קטן מ-x_0 בסתירה לטענה.

② נסח כפסוק את: "קיים מס' זוגי שמתחלק ב-3".

פתרון: $\exists x.(\exists b(a=2b))\wedge(\exists b(a=3b))$ כאשר עולם הדיון הוא $\mathbb{Z}$.

③ נסח את המשפט האחרון של פרמה:

לכל שלם חיובי n גדול מ-2 לא קיימים שלמים חיוביים a,b,c

כך ש- $a^n+b^n=c^n$ כאשר עולם הדיון הוא הממשיים.

פתרון: נגדיר פרדיקט עבור $N(k)$ שמחזיר T אם k חיובי שלם.

$$\forall n(N(n)\wedge n\geq 3)\to(\forall a\forall b\forall c.\ (\neg((N(a)\wedge N(b)\wedge N(c)\wedge(a^n+b^n=c^n)))$$

תרגיל 4:

האם הפסוקים הבאים שקולים לכל $P(x)$ ו-$Q(x)$ עם הנימוק? הוכח/הפרך.

א) $(\forall x.P(x))\wedge(\forall x.Q(x)) \equiv \forall x(P(x)\wedge Q(x))$

פתרון: $\boxed{\text{נכון}}$ נוכיח ע"י שקילות דו כיוונית.

($\Rightarrow$) נניח תחילה כי $(\forall x.P(x))\wedge(\forall x.Q(x))$ הוא T. $\Leftarrow$ $\forall xP(x)$ הוא T וגם $\forall x(Q(x))$ הוא T $\Leftarrow$ לכל x_0 נקבל $P(x_0)\wedge Q(x)$ $\Leftarrow$ $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ הוא T.

($\Leftarrow$) נניח כי $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ הוא T. $\Leftarrow$ לכל x_1 מעולם הדיון ש $(P(x_1)\wedge Q(x_1))$ הוא T $\Leftarrow$ $P(x_1)$ הוא T ו-$Q(x_1)$ הוא T. מכאן ~~[illegible]~~ $(\forall xP(x))\wedge(\forall xQ(x))$.

המשך תרגול 2 בדידה

ב) $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \equiv \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

פתרון: $\boxed{\text{לא נכון}}$ לדוגמא: $P(x): x=1$ $Q(x): x=2$

ד) $\forall x (P(x) \to \underset{F}{Q(x)}) \equiv \overset{F}{(\forall x P(x))} \underset{T}{\to} \overset{F}{(\forall x Q(x))}$

פתרון: $\boxed{\text{לא נכון}}$ לדוגמא: $P(x): x>3$ $Q(x): x>10$

ג) $\exists x (P(x) \to Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \to (\exists x Q(x))$

פתרון: $\boxed{\text{נכון}}$

$$(\forall x (P(x)) \to (\exists x Q(x)) \equiv \neg(\forall x (P(x))) \vee (\exists x Q(x)) \equiv \exists x (\neg P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \equiv$$

$$\overset{*\text{אבחנת}}{\equiv} \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x (P(x) \to Q(x)) \blacksquare$$

משתנה חופשי

משתנה שניתן להציב במקומו ערך. אחרת המשתנה הוא קשור.

תרגיל 5:

בכל אחד מהביטויים הבאים אילו משתנים חופשיים ואילו משתנים הם קשורים.

1) $\forall x\in\mathbb{R}. (x+y \geq 4)$ - x קשור, y חופשי.

2) $\forall y \underbrace{((\overset{x\ \text{קשור}}{\exists x (y^2=x)}) \vee (\overset{x\ \text{חופשי}}{xy=0}))}_{y\ \text{קשור}}$ - y קשור, x גם קשור וגם חופשי.

כלל α (הרחבה פשוטה)

מותר להחליף משתנה קשור x במשתנה y כאשר y אינו מופיע כלל בטווח הקשירה של x.

3) $\forall x \underbrace{(\overset{y\ \text{חופשי}}{P(x,y)} \to (\overset{y\ \text{קשור}}{\exists y. A(x,y)}))}_{x\ \text{קשור}}$

4) $\sum_{i=1}^{10} i^2$ - i קשור

5) $\sum_{i=1}^{23} n^3 i^{10}$ - i קשור, n חופשי

6) $\int_1^2 x \ln x \, dx$ - x קשור.