תרגול חזרה בדידה 3

שאלה: תהא $f: A \to B$ פונ'. הוכח: f יחס טרנזיטיבי אמ"מ $f|_{Imf} = id$

פתרון:

$\boxed{\Leftarrow}$ נ"ח f טרנזיטיבי. מכאן שלכל a,b,c: $\langle a,b\rangle \in f \wedge \langle b,c\rangle \in f \Rightarrow \langle a,c\rangle \in f$

f היא פונ', ולכן: $f(a)=b \wedge f(b)=c \Rightarrow f(a)=c$

נניח $b \in Imf$, כלומר קיים a כך ש- $f(a)=b$ אזי: $f(b)=f(f(a))=f(a)=b$

מכאן ש- $f|_{Imf} = id$

$\boxed{\Rightarrow}$ מכיוון השני, נ"ח $f|_{Imf} = id$. יהא $a \in A$ אזי $f(f(a))=f(a)$

יהיו a,b,c כך ש- $\langle a,b\rangle \in f$ וגם $\langle b,c\rangle \in f$. f היא פונ' ולכן $f(a)=b$

וגם $f(b)=c$ כלומר $f(f(a))=c$ אבל $f(f(a))=f(a)$ כלומר

קיבלנו ש $f(a)=c \Leftarrow \langle a,c\rangle \in f$ ו-f טרנזיטיבי.

שאלה (מועד ב' 2012 חורף)

עבור קבו' $A \subseteq \mathbb{N}$ נסמן ב- χ_A את הפונ' האופיינית של A ביחס ל- $\mathbb{N}$.

נגדיר שתי קבו': $A=\{n\in\mathbb{N} \mid 1 \le n \le 100\}$, $B=\{n\in\mathbb{N} \mid \exists k\in\mathbb{N}. n=3k\}$

(א) חשבו את $\chi_A(0)$, $\chi_B(2)$, $\chi_{A\cup B}(5)$.

פתרון: 0, 0, 1.

(ב) תהיה $C \subseteq \mathbb{N}$ המקיימת: לכל מספר טבעי n, $\chi_C(n) \le \chi_{A\cap B}(n)$.

תהיה f הפונ' היוצרת הרגילה של χ_C. הוכיחו ש- $f(2)$ הוא מס' טבעי

המתחלק ב- 8.

פתרון: ידוע ש- $\chi_C = \lambda n. \begin{cases} 0 & n\notin C \\ 1 & n\in C \end{cases}$

ולכן: $f = \lambda x. \sum_{i=0}^{\infty} \chi_C(i) x^i = \lambda x. \sum_{i\in C} x^i$

ידוע ש- $\left.\begin{array}{l} \chi_{A\cup B}(0)=0 \Rightarrow \chi_C(0)=0 \\ \chi_{A\cup B}(1)=0 \Rightarrow \chi_C(1)=0 \\ \chi_{A\cup B}(2)=0 \Rightarrow \chi_C(2)=0 \end{array}\right\}$ כי $\chi_C(n) \le \chi_{A\cap B}(n)$

אם $C=\emptyset$ אזי $f=\lambda x. 0$ ו- $f(2)$ עונה על הדרוש.

אם $C \neq \emptyset$ אזי ה- $c\in C$ המינימלי הוא לפחות 3. אזי: $f=\lambda x. x^3 \sum_{i\in C} x^{i-3}$

ואז: $f(2)=8\sum_{i\in C} 2^{i-3}$ הוא טבעי, כמכפלה של טבעיים, ומתחלק ב-8 כנדרש

שאלה (מועד ב', חורף 2012)

הניסיון לפתור את המשוואה $x^3=x^2+4x-4$ באמצעות שיטת ברנולי נכשל אם בוחרים למשל את 0,0,1 כשלושת איברי הסדרה הראשונים. מדוע? האם אפשר להגיע לפתרון ע"י בחירת תנאי התחלה אחרים?

<u>פתרון:</u> נבנה את נוסחת הנסיגה: $a_{n+3}=a_{n+2}+4a_{n+1}-4a_n$

הפתרון נכשל כי 2,-2 הם שורשים עם אותו ערך מוחלט, והשורש השלישי הינו 1 שקטן בערכו המוחלט מהם.

נניח ש- $|\alpha_1|\geq|\alpha_2|\geq|\alpha_3|$ הפתרון הכללי הוא מהצורה: $a_n=A_1\alpha_1^n+A_2\alpha_2^n+A_3\alpha_3^n$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha_1^{n+1}\left(A_1+A_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n+1}+A_3\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{n+1}\right)}{\alpha_1^n\left(A_1+A_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n+A_3\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^n\right)}$$

וכעת אם $|\alpha_2|=|\alpha_1|$ אזי המנה לא מתכנסת כאשר $n\to\infty$

<u>אבל</u> אם נבחר תנאי התחלה כך ש- $A_2=0$ נצליח! ■

שאלה (מועד א', אביב 2012)

כמה ריבועים (שהם איחוד של משבצות) בלוח $n\times n$?

<u>פתרון:</u> נחלק למקרים לפי גודל הריבוע.

- יש n^2 ריבועים בגודל 1×1.
- יש $(n-1)^2$ ריבועים בגודל 2×2.

$\Leftarrow$ באופן כללי יש $(n-k+1)^2$ ריבועים בגודל $k\times k$

ולכן, מס' הריבועים הכולל הינו: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)\cdot n$

(מציאת הביטוי:

$a_n=\lambda n.n$ $\quad f$

$b_n=\lambda n.n^2$ $\quad g=\lambda x.xf'$

$c_n=\lambda n.\sum_{k=1}^{n}k^2$ $\quad h=\lambda x.\frac{g}{1-x}$

<u>תרגיל:</u> נגדיר פונקציה $H=\lambda f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}.(\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f(y,x))^3)$

1. מצא את $|A| = |\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$
2. מצא את $|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$

<u>פתרון:</u> ① מתקיים ש- $A\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ ולכן: $|A|\leq|\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}|=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$

מצד שני, נגדיר פונ' $G\in(\mathbb{R}\to\{0,1\})\to A$ כך ש-

$$G=\lambda h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}.\ \lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases}h(x), & x=y\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

המשך תרגול חזרה לבוחן 8

<u>המשך פתרון התרגיל</u>: לכל $h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$ מתקיים:

$$H(G(h))=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\,(G(h)(y,x))^3=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases}(h(y))^3, & x=y\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}=$$

$$\overset{\uparrow}{=}\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases}h(y), & x=y\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}=G(h)$$

כי $h(y)=0\vee 1$
ומתקיים: $0^3=0,\ 1^3=1$

נוכיח חח"ע:

יהיו $h_1,h_2\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$ כך ש- $G(h_1)=G(h_2)$, מכאן, לכל $x\in\mathbb{R}$: $(G(h_1))(x,x)=(G(h_2))(x,x)$

$$\Downarrow$$

כנדרש $h_1=h_2 \Leftarrow h_1(x)=h_2(x)$

לכן $|A|\geq 2^{\aleph}$, ומקש"ב, $|A|=2^{\aleph}$ ∎

② נוכיח שלכל $f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, מתקיים $H(f)\neq f$.

נניח בשלילה שקיימת f כזו. נסתכל על $z=f(5,5)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$z=f(5,5)=(H(f))(5,5)=f(5,5)^3=z^3$$

אבל הפתרונות של $z=z^3$ הם $-1,0,1$, כולם רציונליים – סתירה ∎

<u>שאלה (מועד א', חורף 2013)</u>:

תהי $f\in\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$. הציגו בנייה מפורשת לשתי קבוצות שונות של טבעיים
A ו- B שלא שייכות ל- Imf.

<u>פתרון</u>:

$$f(0)=\{a_{0,0},a_{0,1},a_{0,2},a_{0,3},\dots\}$$
$$f(1)=\{a_{1,0},a_{1,1},a_{1,2},\dots\}$$
$$f(2)=\{a_{2,0},a_{2,1},a_{2,2},\dots\}$$

כך ש- $a_{i,j}=1$ אם $j\in f(i)$ ו-0 אחרת.

נגדיר: $A=\{n\in\mathbb{N}\mid n\notin f(n)\}$

נניח בשלילה שקיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(m)=A$, אבל $m\notin f(m)\Leftrightarrow m\in A$.

הפונקציה נוספת (נגדיר פונ' עזר) $g\in\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$: $g=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}A & n=0\\ f(n-1) & \text{אחרת}\end{cases}$

נגדיר $B=\{n\in\mathbb{N}\mid n\notin g(n)\}$. מתקיים:

① $A\neq B$ כי $0\notin g(A)\Leftrightarrow 0\notin g(0)\Leftrightarrow 0\in B$

② $B\notin Imf$ כי נניח שקיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(m)=B$. אז $m+1\notin f(m)\Leftrightarrow m+1\notin g(m+1)\Leftrightarrow m+1\in B$

∎

שאלה: כמה רביעיות $\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle$ של טבעיים מקיימות $x_1x_2x_3x_4=1,000,000$?

פתרון: צ"ל: $x_1x_2x_3x_4=10^6=2^6\cdot5^6$

המספרים 2 ו-5 ראשוניים ולכן בהכרח קיימים a,b,c,d,e,f,g טבעיים

כך ש- $x_1=2^a5^b$, $x_2=2^c5^d$, $x_3=2^e5^f$, $x_4=2^g5^h$.

אז: $2^{a+c+e+g}\cdot5^{b+d+f+h}=2^6\cdot5^6$

מכאן, שבהכרח: $a+c+e+g=6 \wedge b+d+f+h=6$

לכן התשובה הסופית: $\binom{4+6-1}{6}^2=\binom{9}{6}^2$ ■

שאלה: תהא $\omega(n)=\{1,\dots,k\}$. בהתאמה נוכל לרשום את $\omega(n)$ כל חוז

זר של 5 קבו' A,B,C,D,E כך ש- A,C אינן ריקות ומ-D מכילה זוגי של איברים.

פתרון: שקול ל- $\underbrace{\underline{A}\ \underline{D}\ \underline{D}\ \underline{C}\ \_\ \underline{E}}_{n \text{ מקומות}}$ $\boxed{n=4}$ D מקבל 2 מקומות

A מקבל מקום

C מקבל מקום

$a\cdot\frac{4!}{2!\cdot1!\cdot1!}$

$$f=\lambda x.\ \underbrace{\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^2}_{A,C}\cdot\underbrace{\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)}_{D}\underbrace{\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^2}_{B,E}$$

ואם נסמן ב- a_n את המקדם של x^n ב-f, התשובה שלנו תהיה $n!\cdot a_n$

$$f=\lambda x.\ (e^x-1)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)(e^x)^2=\lambda x.\ \frac{1}{2}(e^{2x}-2e^x+1)(e^x+e^{-x})e^{2x}=\cancel{\lambda x.\ \frac{1}{2}(e^{5x}-2e^{4x}+2e^{3x})}$$

$$=\lambda x.\ \frac{1}{2}(e^{5x}-2e^{4x}+2e^{3x}-2e^{2x}+e^x)=\lambda x.\ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{5^i}{i!}-2\frac{4^i}{i!}+2\cdot\frac{3^i}{i!}-2\cdot\frac{2^i}{i!}+\frac{1}{i!}\right)x^i$$

ונקבל שהמקדם ה-n הוא (כי הכפלנו ב-$n!$): $\frac{5^n+1}{2}-4^n+3^n-2^n$

* אם יש איבר חופשי - $8+e^x$ זה שקול לכתוב $8\cdot x^0+e^x$ ולכן

זה יוסיף 8 רק לאיבר ה-0.