תרגול חזרה בדידה:

<u>תרגיל 1:</u> חשבו את הסכום $\sum_{k=0}^{n} k\cdot 2^k$

① נמצא את הפונ' היוצרת של הסדרה $\lambda n. 2^n$:

$$f=\lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \lambda x. \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \lambda x. \frac{1}{1-2x}$$

② מכאן, הפונ' היוצרת של $\lambda n. n2^n$ היא:

$$g=\lambda x. x\cdot\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \lambda x. \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

③ לכן, הפונ' היוצרת של הסכומים החלקיים:

$$h=\lambda x. \frac{g(x)}{1-x} = \lambda x. \frac{2x}{(1-2x)^2(1-x)}$$

כעת נרצה נמצא את הסדרה. נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{2x}{(1-2x)^2(1-x)} = \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}+\frac{C}{(1-2x)^2} \Rightarrow h=\lambda x. \frac{2}{1-x}-\frac{4}{1-2x}+\frac{2}{(1-2x)^2} =$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)x^k}$$

$$= 2\sum_{i=0}^{\infty} x^i - 4\sum_{i=0}^{\infty}(2x)^i + 2\sum_{i=0}^{\infty} S(2,i)(2x)^i$$

$$h=\sum_{i=0}^{\infty}\left(2-4\cdot 2^i+2\binom{i+1}{i}2^i\right)x^i$$

והאיבר ה-n בסכום הוא:

$$2-4\cdot 2^n+2\binom{n+1}{n}\cdot 2^n =$$
$$= 2\left(1-2^{n+1}+(n+1)2^n\right) = \underline{2\left(1-2^n+n2^n\right)}$$

<u>שאלה (מועד א' 2009)</u>

תהיינה $A=\{1,..6\}$, $B=\{a,b,c,d\}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על הקבוצה $A\to B$

כך: $f\sim g \Leftrightarrow \exists h\in Eq(A,A). f=g\circ h$

חשבו את עוצמתה של קב' המנה $^{A\to B}/_{\sim}$

<u>תזכורת:</u> $Eq(A,A)$ הוא אוסף פונ' השקילות מ-A ל-A.

<u>פתרון:</u>

נוכיח תחילה כי $f\sim g$ אמ"מ: $\forall b\in B. |\{a\in A| g(a)=b\}| = |\{a\in A| f(a)=b\}|$

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח שקיימת $h\in A\to A$ כך ש- $f=g\circ h$. נסמן:

$X_b=\{a\in A| g(a)=b\}$

$Y_b=\{a\in A| f(a)=b\}$

צ"ל: לכל $b\in B$, $|X_b|=|Y_b|$. h היא פונ' שקילות ומתקיים

שלכל $a\in X_b$, $h(a)\in Y_b$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח כי לכל $b\in B$, $|X_b|=|Y_b|$. כלומר קיימת פונ' שקילות $f_b\in Y_b\to X_b$

ונגדיר פונ' $h\in A\to A$ כך: $h=\bigcup_{b\in B} f_b$.

- h מוגדרת היטב, כי לכל $b_1\neq b_2$ $Dom f_{b_1}\cap Dom f_{b_2}=\emptyset$ ו- $\bigcup_{b\in B} Dom f_b = A$
- h על כי כל f_b היא על.
- h חח"ע כי אם עבור $a_1,a_2\in A$ שמתקיים $h(a_1)=h(a_2)=b$ אז $a_1=a_2 \xLeftarrow{f_b\ \text{חח"ע}} f_b(a_1)=f_b(a_2)$.

h מקיימת את הנדרש כי לכל $a\in A$, $b=f(a)=g(f_b(a))=g(h(a))=(g\circ h)(a)$

מחלקות שקילות שונות יהיו שונות רק במספר הפעמים שמופיע איבר ב-B.

כל איבר ב-B הוא תא, וצריך לחלק 6 כדורים לתאים.

מכאן: $|A\to B/\sim| = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{3}$ ■

תרגיל:

תהיינה A,B,C קבוצות לא ריקות. נגדיר $H\in((B\cup C)\to A)\to((B\to A)\times(C\to A))$

באופן הבא: $H=\lambda h\in(B\cup C)\to A.\langle h|_B, h|_C\rangle$

① הוכח/הפרך: H חח"ע

② מצא תנאי מספיק והכרחי לכך ש-H היא על $((B\to A)\times(C\to A))$

פתרון: ① נכון. תהיינה $h_1,h_2\in(B\cup C)$ כך ש- $H(h_1)=H(h_2)$, כלומר:

$$\langle h_1|_B, h_1|_C\rangle = \langle h_2|_B, h_2|_C\rangle \Rightarrow (h_1|_B=h_2|_B)\wedge(h_1|_C=h_2|_C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall x\in B.\, h_1(x)=h_2(x))\wedge(\forall x\in C.\, h_1(x)) \Rightarrow \forall x\in B\cup C.\, h_1(x)=h_2(x) \Rightarrow h_1=h_2 \checkmark$$

② התנאי: $B\cap C=\emptyset$ או $|A|=1$

כיוון ראשון: נניח $B\cap C=\emptyset$ או $|A|=1$.

* אם $|A|=1$, אז ב-$(B\to A)\times(C\to A)$ יש איבר 1 ולכן בפרט H על.
* אם $B\cap C=\emptyset$, נקח $\langle h_1,h_2\rangle\in(B\to A)\times(C\to A)$ ונראה שיש לאיבר הנ"ל מקור.

נגדיר $h=\lambda x\in B\cup C.\begin{cases}h_1(x) & x\in C\\ h_2(x) & x\in B\end{cases}$. h מוגדרת היטב כי הקבוצות זרות,

ומתקיים $H(h)=\langle h_1,h_2\rangle$.

כיוון שני: נניח ש-H היא על. נניח בשלילה ש- $B\cap C\neq\emptyset$ וגם $|A|\geq 2$.

יהיו $x\in B\cap C$ ו- $a,b\in A$ כך ש- $a\neq b$. יהיו $\langle h_1,h_2\rangle\in(B\to A)\times(C\to A)$

כך ש- $h_1=\lambda x\in B.a$, $h_2=\lambda x\in C.b$. לא קיימת $h\in(B\cup C)\to A$ כך ש-

$H(h)=\langle h_1,h_2\rangle$ כי מצד אחד $h(x)=h_1(x)=a$ ומצד שני $h(x)=h_2(x)=b$

בסתירה לכך ש-h היא פונקציה. ■

המשך תרגול חזרה בדידה

תרגיל:

תהא $M \subseteq \mathbb{N}$. נגדיר יחס R ב- $P(M)$ באופן הבא: $R=\{\langle M_1,M_2\rangle \in P(M)\times P(M) \mid |M_1|=|M_2|\}$

① אם M סופית, מה מחלקות השקילות ומה קב' המנה ועוצמתה.

② כנ"ל עבור M אינסופית.

פתרון:

① נקח M סופית, $|M|=d$. נגדיר: לכל $0\le i\in\mathbb{N}$, נגדיר $M_i=\{A\in P(M) \mid |A|=i\}$

לכן, לכל $A\subseteq M$, $[A]_R=M_{|A|}$. לכן קב' המנה תכיל מחלקת שקילות של נציג מכל עוצמה, כלומר: $P(M)/R=\{M_i \mid 0\le i\le d\}$ $\Leftarrow$ $|P(M)/R|=d+1$

② M אין סופית. תהא $A\subseteq M$. אם A סופית - מחלקת השקילות היא כמו ב-①.

אחרת, A אין סופית ולכן $|A|\ge\aleph_0$, מצד שני $A\subseteq M\subseteq\mathbb{N}$ ולכן $|A|\le\aleph_0$, מהקש"ב $|A|=\aleph_0$. באופן דומה $|M|\ge\aleph_0$ ו- $|M|\le\aleph_0$ כי $M\subseteq\mathbb{N}$ ולכן $|M|=\aleph_0$ $\Leftarrow$ $|A|=|M|$.

$\Leftarrow$ $\langle A,M\rangle\in R$ $\Leftarrow$ $[A]_R=[M]_R$.

סך הכל: $P(M)/R=\{M_i \mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{[M]_R\}$ ועוצמתה: $\aleph_0+1=\aleph_0$ ■

תרגיל: מהו מספר הגרפים הפשוטים הלא מכוונים עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים?

פתרון: העולם שלנו: U כל הגרפים הפשוטים הלא מכוונים על n צמתים. $|U|=2^{\binom{n}{2}}$

כאשר $\binom{n}{2}$ הינו מס' הקשתות האפשריות.

לכל $1\le i\le n$ נגדיר את A_i להיות הגרפים הפשוטים הלא מכוונים על n צמתים אשר צומת i מבודד. נחפש את: $\left|\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right|$

$|A_i|=2^{\binom{n-1}{2}}$ באופן דומה עבור $1\le i_1<\dots<i_k\le n$: $|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|=2^{\binom{n-k}{2}}$

ולכן לפי הכלה והדחה: $\left|\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right|=2^{\binom{n}{2}}-\binom{n}{1}2^{\binom{n-1}{2}}+\dots+(-1)^n2^{\binom{n-n}{2}}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}2^{\binom{n-i}{2}}$ ■

משפט: בגרף G יש מעגל אוילר או מסלול אוילר אמ"מ הוא קשיר ומספר הצמתים שדרגתם אי"ז הוא 0 (ואז זה מעגל) או 2.

תרגיל:

הוכיחו: אם גרף לא מכוון, סופי וקשיר מקיים שבדיוק ל- $2k$ מצמתיו יש דרגה אי זוגית ($1\le k$) אזי ניתן למצוא חלוקה של קשתותיו ל-k מסלולים זרים בקשתות, שבה כל קשת שייכת למסלול אחד בדיוק.

פתרון:

נסמן את הצמתים בעלי דרגה אי"ז כ- $O=\{u_1,u_2,\dots,u_{2k-1},u_{2k}\}$

נבנה גרף חדש $G'=\langle V,E'\rangle$ כך ש- $E'=E\cup\{\{u_{2i-1},u_{2i}\}\mid 1\le i\le k\}$

ב-G' כל הצמתים בדרגה זוגית והוא קשיר (כי G היה קשיר) ולכן יש לו מעגל אוילר.

מה"כ, הוא מהצורה הבאה: $\langle v,\dots,u_1,u_2,\cancel{u_3},u_3,u_4,\dots,u_{2k-1},u_{2k},v\rangle$.

נחלק את המעגל הנ"ל ל-k מסלולים כך: $\left.\begin{matrix}\langle u_2,\dots,u_3\rangle,\langle u_4,\dots,u_5\rangle,\\ \langle u_{2k-2},\dots,u_{2k-1}\rangle,\ \langle u_{2k},\dots,v,\dots,u_1\rangle\end{matrix}\right\}$ יש k מסלולים

מתקיים: ① מכיוון שהמעגל הנ"ל היה אוילרי כל קשת מופיעה בו בדיוק פעם אחת, לכן כל קשת תופיע במסלול אחד לכל היותר.

② מכיוון שהמעגל הכיל את כל הקשתות G והורדנו ממנו רק הקשתות שהוספנו ב-G', אז המסלולים שבנינו מכילים את כל הקשתות שלהם.