תרגול בדידה אחרון

גרפים:

תרגיל 1: כמה גרפים עם n צמתים שונים ו-m קשתות, כך ש-

① הגרף לא מכוון ופשוט: כל קשת מחברת בין 2 צמתים. ישנם $\binom{n}{2}$ זוגות צמתים.
כל קשת מתאימה לזוג צמתים, ולכן: $\binom{\binom{n}{2}}{m}$.

② הגרף מכוון ופשוט: כעת יש לנו $2\binom{n}{2}=n\cdot(n-1)$ זוגות צמתים ולכן: $\binom{n\cdot(n-1)}{m}$

③ הגרף הוא מולטי גרף לא מכוון: כעת יש לנו $\binom{n}{2}+n$ זוגות צמתים (סופרים גם לולאות).
מכיוון שניתן לבחור את מיקומי ההשתתות עם חזרות, הבעיה שקולה לחלוקת m כדורים זהים ל-$\binom{n}{2}+n$ תאים, ולכן מס' האפשרויות: $\binom{m+\binom{n}{2}+n-1}{m}$

④ הגרף הוא מולטי גרף מכוון: כעת יש לנו $2\binom{n}{2}+n=n^2$ זוגות צמתים,
ובאופן דומה: $\binom{m+n^2-1}{m}$.

הגדרה: יהיו $G=\langle V,E\rangle$ גרף פשוט לא מכוון, הגרף המשלים לו, $\bar{G}=\langle V,\bar{E}\rangle$
כך ש- $\bar{E}=P_2(V)\setminus E$.

תרגיל 2: הוכח/הפרך: קיים גרף על קבוצת הצמתים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$
שאיזומורפי למשלים שלו.

פתרון: אין כזה גרף! נניח בשלילה שקיים גרף כזה $G=\langle V,E\rangle$ כך ש- $G\overset{\text{איזומורפי}}{\cong}\bar{G}$
אזי ה"ב נהתקיים: $|E|=|\bar{E}|$. באופן כללי: $|E|+|\bar{E}|\overset{\text{הקודמות}}{=}|E\cup\bar{E}|=|P_2(V)|=\binom{6}{2}=15$
מכאן ש- $2|E|=15$ וזו סתירה.

תרגיל 3: הוכח כי מס' הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים, בהם אין צמתים מבודדים, שווה למס' הגרפים הפשוטים הלא מכוונים בהם אין צמתים שדרגתם $n-1$.

פתרון: נסמן ב-A את הגרפים ללא צמתים מבודדים, וב-B את הגרפים בהם אין צמתים שדרגתם $n-1$. נראה $f\in A\to B$ פונק' שהפיכות, מה שיוכיח ש- $|A|=|B|$.
יהי $A\ni G=\langle V,E\rangle$. f תחזיר את $\bar{G}$.

ⓐ מתקיים ש- $f(G)=\bar{G}\in B$ כי אם אין צמתים מבודדים, לכל $v\in V$ ב-G, $\deg v\geq 1$, לכן ב-$\bar{G}$ לכל $v\in V$, $\deg v\leq n-2$

ⓑ f היא שהפיכות מכך שההפיכה שלה היא f עצמה:
$f(f(G))=\langle V,P_2(V)\setminus(P_2(V)\setminus E)\rangle=\langle V,E\rangle=G$ ☒

תרגיל 4: הוכח: לכל גרף לא מכוון ופשוט, $G=<V,E>$, G קשיר או $\bar{G}$ קשיר.

פתרון: אם G קשיר סיימנו. אחרת, נוכיח כי $\bar{G}$ קשיר.

- יהיו $u,v\in V$ כך ש- u ו- v אינם קשורים (קיימים כי G לא קשיר).
- מכיוון שההכרח $\{u,v\}\notin E$ ולכן $\{v,u\}\in\bar{E}$.
- לכל $w\in V$ לא ייתכן כי $\{v,w\}\in E$ וגם $\{u,w\}\in E$, כי אז ב- G היה מסלול $<v,w,u>$

לכן: $\{v,w\}\in\bar{E} \vee \{u,w\}\in\bar{E}$.

כעת, יהיו $w_1,w_2\in V$. אם $\{w_1,u\}\in\bar{E} \wedge \{w_2,u\}\in\bar{E}$ סיימנו, כי יש לנו מסלול $<w_1,u,w_2>$ (הדומה ל- v).

אחרת מהנ"ל $<w_1,u>\in\bar{E}$ וגם $<w_2,v>\in\bar{E}$ וגם סיימנו, כי יש מסלול $<w_1,u,v,w_2>$ כנדרש. ■

הגדרה: בהינתן גרף $G=<V,E>$ קשיר, עץ פורש T של G הוא תת-גרף המהווה עץ. (מהתרגול הקודם)

תרגיל 7: הוכיחו שבכל גרף קשיר סופי ולא מכוון $G=<V,E>$, אפשר למצוא $|E|-|V|+1$ מעגלים שבכל אחד מהם יש קשת אחת שונה מופיעה בשום מעגל אחר.

פתרון: יהא $T=<V,\tilde{E}>$ עץ פורש של G. T הוא עץ ולכן $|\tilde{E}|=|V|-1$

ולכן קיימות $|E|-|\tilde{E}|=|E|-|V|+1=m$ הקשתות שהן ב- G אך לא ב- T.

נסמן אותן ב- $\{e_1,e_2,\dots e_m\}$, לכל i, הוספת e_i ל- T יוצרת מעגל (כי עץ הוא חסר מעגלים מקסימלי) יוצרת מעגל C_i. ~~הממממ~~ מקבלת: $\{C_1,C_2,\dots C_m\}$

הם מעגלים ב- G. מתקיים $\bigcap_{i=1}^{m} C_i\subseteq\tilde{E}$ (כי לכל i הקשת e_i מופיעה רק ב- C_i) ■

תרגיל 8: ביער בעל רכיבי קשירות ו- 200 צמתים. כמה קשתות ביער?

פתרון: נסמן ב- $G=<V,E>$ את הגרף הנתון. כל רכיב קשירות הוא עץ.

עבור רכיב הקשירות ה-i נסמן ב- m_i את מס' הקשתות וב- n_i את מס' הצמתים

ומתקיים: $n_i=m_i+1$, ולכן $\sum_{i=1}^{100} n_i=\sum_{i=1}^{100} m_i+100 \overset{\text{נתון}}{\Rightarrow} |E|=\sum_{i=1}^{100} m_i=200-100=100$

■

משפט קיילי: מס' העצים עם דרגות הצמתים $\{1,\dots,n\}$ הוא $\boxed{n^{n-2}}$.

קוד פרופר: יצירת מחרוזת מעץ: בכל שלב נמחק את העלה הנמוך ביותר מהעץ, ונוסיף את שכנו למחרוזת. (עד שנשארו 2 קודקודים)

יצירת עץ ממחרוזת: נקבע לכל v את דרגתו להיות מס' ההופעות של v במחרוזת+1.

בשלב ה-i (מ-1 עד $n-2$): יהא j הנמוך ביותר כך ש- $d_j=1$, נבנה קשת $\{j,a_i\}$, נעדכן את d ולבסוף נוסיף קשת בין 2 הצמתים הנותרים.

המשך תרגול בדידה אחרון:

תרגיל 9: ① בכמה עצים על $\{1,...,9\}$, $d(4)=5$?

פתרון: שאלה שקולה: בכמה מחרוזות באורך 7 מעל $\{1,...,9\}$ הספרה 4 מופיעה 4 פעמים:

$\underline{\binom{7}{4}\cdot 8^3}$ נבחר מקומות ל-4 ; נמלא את השאר

② בכמה עצים על $\{1,...,10\}$ הצמתים 1,2,3 עלים?

פתרון: שאלה שקולה: כמה מחרוזות באורך 8 שמעל $\{4,...,10\}$: $\underline{7^8}$

③ בכמה עצים על $\{1,...,n\}$ הצמתים 1 ו-2 קשורים?

פתרון: נסמן ב-X את מס' עצים כזה. X הוא גם מס' העצים שבהם i ו-j קשורים

לכל $i\neq j$. נסתכל על הסכום $\sum_{1\le i<j\le n} X$. כל עץ על n צמתים $\sum_{1\le i<j\le n} X=(n-1)n^{n-2}$

מצד שני $\sum_{1\le i<j\le n} X=\binom{n}{2}X$ ולכן: $X=\frac{(n-1)n^{n-2}}{\binom{n}{2}}=\frac{2(n-1)n^{n-2}}{(n-1)n}=\underline{2n^{n-3}}$

④ בכמה עצים על $\{1,...,n\}$ יש $n-3$ עלים בדיוק?

פתרון: שאלה שקולה: בכמה מחרוזות באורך $n-2$ מופיעים בדיוק 3 איברים?

נקבע את 3 האיברים $\binom{n}{3}$, ולאחר מכן נפתור ע"י הכלה

והדחה. U הוא אוסף המחרוזות על 3 איברים ו-A_i ($1\le i\le 3$) הוא קב' המחרוזות

בהן i לא מופיע. לכן: $\underline{\binom{n}{3}\left(3^{n-2}-3\cdot 2^{n-2}+3\right)}$