תרגול 13 בדידה

נוסחאות נסיגה:

<u>דוגמא</u>: כמה מחרוזות בינאריות באורך n קיימות?

<u>פתרון</u>: נסמן את מס' הפתרונות ב-a_n. נניח ומצאנו כמה כאלו באורך n-1 יש (a_{n-1} אפשרויות). ישנן 2 אפשרויות להשלים למחרוזת באורך n ולכן $a_n = 2\cdot a_{n-1}$

ותנאי התחלה: $a_0 = 1$.

<u>תרגיל 1</u>: בכמה דרכים ניתן לרצף שביל באורך n ע"י שימוש במרצפות אדומות באורך 2, ירוקות באורך 2 ושחורות באורך 1?

<u>פתרון</u>: נסמן את מס' הפתרונות ב-a_n. נניח שכבר ריצפנו את כל השביל פרט למרצפת האחרונה. נחלק למקרים לפי המרצפת האחרונה, אז ניתן להניח:

* מרצפת אדומה + ירוקה - נרצף באורך n-2: a_{n-2} אפשרויות ונבחר מבין הצבעות המרצפת האדומה.
* מרצפת שחורה - נרצף באורך n-1: a_{n-1} אפשרויות.

סה"כ האפשרויות זרות ומכלל החיבור: קיבלנו: $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}$ $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

<u>תרגיל 2</u>: בכמה דרכים ניתן לחלק n אנשים לזוגות ובודדים?

<u>פתרון</u>: נסמן ב-a_n את מס' האפשרויות לחלק n אנשים, ונסתכל על בן אדם יחיד, אז ניתן לספרו לבד ונסדר את השאר ב-a_{n-1} אפשרויות.

ניתן לזווגו לאיש אחר. נבחר איש כזה (n-1 אפשרויות) ונסדר את יתר n-2 האנשים ב-a_{n-2} אפשרויות. סה"כ: $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$

תנאי התחלה: $a_0 = a_1 = 1$

<u>תרגיל 3</u>: בכמה מחרוזות בינאריות באורך n לא מופיע הרצף 110?

<u>פתרון</u>: נסמן ב-a_n את מס' האפשרויות.

* אם המחרוזת מתחילה ב-0 אז יש a_{n-1} אפשרויות להמשך (אין הגבלה)
* אם המחרוזת מתחילה ב-1: - אם התו השני הוא 0, ניתן להשלים אותה ב-a_{n-2} אפשרויות
  - אם התו השני הוא 1, ניתן להשלים רק בצורה אחת - הכל אחדים.

סה"כ: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ עם ש"ה $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

תרגיל 4: בכמה מחרוזות בינאריות באורך n לא מופיע הרצף 101?

פתרון: נסמן ב-a_n מס' האפשרויות ל-n תווים.

* אם המחרוזת מתחילה ב-0 ניתן להשלים ב- a_{n-1} אפשרויות.
* אם המחרוזת מתחילה ב-1: - אם השני 0, נשים אחריו 0 מוכ' ויש a_{n-3} אפשרויות להמשך.
- אם התו השני 1, אז אם השלישי 0, התו הרביעי 0 ויש a_{n-4} להמשך.
* אם השלישי 1 נמשיך בחוקיות...

וכך הלאה: $a_n = a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}+\ldots+a_1+a_0+2$

באופן דומה: $a_{n-1} = a_{n-2}+a_{n-4}+a_{n-5}+\ldots+a_1+a_0+2$

נחסר את שתי המשוואות ונקבל: $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 2a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$$

ותנאי התחלה: $a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=4$ ■

תרגיל 6: במסיבה n רקדנים, מה מספר החלוקות שלהם למעגלים כאשר אין סדר בין המעגלים אך יש סדר בתוך כל המעגל?

פתרון: נסמן ב- a_n את מס' האפשרויות. נתבונן במעגל שבו נמצא רקדן מס' 1, ונסמן ב-k את מס' הרקדנים באותו מעגל. מס' האפשרויות לבחירת הרקדנים למעגל הזה: $\binom{n-1}{k-1}$

ודרך נסדרם במעגל: $(k-1)!$ אפשרויות. את יתר n-k האנשים נסדר ב- a_{n-k} אפשרויות.

סה"כ: $a_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(k-1)!\cdot a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}a_{n-k}$ עם תנאי התחלה: $a_0=1$

פתרון בעיות רקורסיביות:

דרך 1: פונ' יוצרות: בשיטה זו מוצאים את הפונ' היוצרת של הסדרה ע"י שימוש בתנאי הנסיגה.

תרגיל 7: מצאו ביטוי סגור ל- $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0=0$, $a_1=1$

תהא $f=\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ הפונ' היוצרת של הסדרה.

$$f=\lambda x.\ a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}(5a_{n-1}-6a_{n-2})x^n=$$

$$=\lambda x.\ x+5\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n-6\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$$

נוציא איברים מחוץ לסכימה:

$$f=\lambda x.\ x+5\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n\right)-\overset{0}{\overline{a_0x}}\right)-6\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=$$

$$=\lambda x.\ x+5x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}-6x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}$$

נזיז אינדקסים ונקבל:

$$f=\lambda x.\ x+5x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-6x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

כלומר לכל x (בתחום ההתכנסות):

$$f(x)=x+5x(f(x))-6x^2(f(x))$$

ולכן:

$$f(x)=\frac{x}{6x^2-5x+1}=\frac{x}{(1-2x)(1-3x)}\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{1-3x}-\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=$$

פירוק לשברים חלקיים

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n)x^n$$

⇐ ~~הסדרה~~

⇐ הפתרון המבוקש הוא: $\forall n.\ a_n=3^n-2^n$ ■

המשך תרגול 13 בדידה 3

דרך 2 - פולינום אופייני: נביט את המקרה עבור המשוואה $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$

- נגדיר את הפולינום האופייני להיות $\lambda x. x^2 - c_1x - c_2$. נמצא את שורשיו, r_1, r_2.
- אם $r_1 \neq r_2$, הפתרון יהיה מהצורה $a_n = A\cdot r_1^n + B r_2^n$
- אם $r_1 = r_2$ הפתרון יהיה מהצורה $a_n = A\cdot r^n + B\cdot n\cdot r^n$
- נציב את תנאי ההתחלה כדי למצוא את A ו- B.
- עבור המקרה הלא-הומוגני $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + f(n)$:
  - נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית
  - נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית
  - סכום הביטויים נותן את הפתרון הכללי.

תרגיל 8: מצאו ביטוי סגור ל- $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ עם תנאי ההתחלה $a_0=1, a_1=2$.

פתרון: הפולינום האופייני הוא $\lambda x. x^2-3x+2$. פתרונות המשוואה $x^2-3x+2=0$ הם $1,2$ ולכן פתרון כללי יהיה מהצורה: $\lambda n. A + B\cdot 2^n$.

נציב תנאי התחלה:
$$\begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=2 \end{cases} \quad -B=-1 \Rightarrow A=0$$
ונקבל $A=0, B=1$, לכן: $\forall n\in\mathbb{N}.\ a_n = 2^n$ ■

תרגיל 10: מצאו ביטוי סגור ל- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3^{n-1}$ עם תנאי ההתחלה $a_0=1$, $a_1=6$, כאשר ידוע שיש לה פתרון פרטי מהצורה: $\lambda n. c\cdot 3^n\cdot n$ עבור c כלשהו.

פתרון: נמצא תחילה פתרון כללי למשוואה ההומוגנית המתאימה:

הפו' האופ': $\lambda x. x^2-5x+6$. שורשיו הם $3,2$ ולכן הפתרון של המערכת ההומוגנית הוא מהצורה $\lambda n. A\cdot 2^n + B\cdot 3^n$. כעת יש למצוא פתרון פרטי למשוואה הכללית. אז:

$$cn\cdot 3^n = 5c(n-1)3^{n-1} - 6c(n-2)3^{n-2} + 3^{n-1}$$
$$\Rightarrow cn\cdot 3^n = \left(\frac{5c}{3} - \frac{6c}{9}\right)\cdot n\cdot 3^n + \left(-\frac{5c}{3} + \frac{12c}{9} + \frac{1}{3}\right)3^n$$
$$cn\cdot 3^n = cn\cdot 3^n + \left(-\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\right)3^n$$

נשווה מקדמים ונקבל $c=1$.

נקבל כי פתרון כללי הוא מהצורה: $\lambda n. A\cdot 2^n + B\cdot 3^n + n\cdot 3^n$

נציב תנאי התחלה ונקבל: $\begin{matrix} A+B=1 \\ 2A+3B+3=6 \end{matrix} \Leftarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=1 \end{matrix} \Leftarrow$ הפתרון: $a_n = 3^n + n\cdot 3^n$

תרגיל 2: בכמה מחרוזות טרינאריות באורך n יש מס' זוגי של '1'ים.

פתרון: נסמן ב-a_n את מס' המחרוזות, נחלק למקרים לפי התו האחרון במחרוזת.

אם הספרה האחרונה היא 0 או 2 אז יש a_{n-1} להמשך - סה"כ $2a_{n-1}$ אפשרויות.

אם הספרה האחרונה היא '1', אז ב-$n-1$ המקומות הראשונים יש מס' אי-זוגי של '1'ים. מס' האפשרויות הוא המשלים: $3^{n-1}-a_{n-1}$

וסך הכל קיבלנו: $a_n = 2a_{n-1}+3^{n-1}+a_{n-1} = 3a_{n-1}+3^{n-1}$ כך ש-$a_0=1$.