בדידה תרגול 12

תזכורות:

① סכום של טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

② סכום של טור הנדסי אין סופי: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ $(|q|<1)$

③ לכל x ממשי ו-k טבעי, נגדיר את המקדם הבינומי: $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!}$ ועבור $k=0$: $\binom{x}{0}=1$

④ מתקיים: $\forall a,b,\alpha\in\mathbb{R}, \left|\frac{b}{a}\right|<1 \Rightarrow (a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}a^{\alpha-k}b^k$

ובפרט, $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-1)^k x^k$

⑤ זהות חשובה: $\binom{-n}{k} = (-1)^n \underbrace{\binom{n+k-1}{k}}_{S(n,k)}$

פונקציות יוצרות:

בהינתן סדרת מספרים $\lambda n.a_n$, הפונ' היוצרת המתאימה לה היא הפונקציה $\boxed{f=\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$.

דוגמאות:

(1) עבור הסדרה $<\binom{k}{0}\binom{k}{1}\ldots\binom{k}{k},0,0,0>$ הפונ' היוצרת היא:
$$f=\lambda x.\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^n = (1+x)^k$$

(2) עבור הסדרה $\lambda n.1=<1,1,1\ldots>$ הפונ' היוצרת היא:
$$f=\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

(3) עבור הסדרה $\lambda n.2^n$, הפונ' היוצרת היא:
$$f=\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \lambda x.\frac{1}{1-2x}$$

בכיוון ההפוך, אם f פונ' יוצרת עבור סדרה $\lambda n.a_n$, אזי מתקיים: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}.\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

תרגיל 1:

① הוכיחו: אם f יוצרת את $\lambda n.a_n$ אזי $\lambda x.xf'(x)$ יוצרת את $\lambda n.na_n$

② מצאו פונ' יוצרת לסדרה $\lambda n.7^n\cdot n$

פתרון:

① $\lambda x.xf'(x) = \lambda x.x\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_n x^n\right)' = \lambda x.x\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}\right) = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n$

⇐ לפי הגדרה זו הפונ' שיוצרת את הסדרה $\lambda n.na_n$ כנדרש! ■

② בדומה לדוגמה 3, הפונ' היוצרת של $\lambda n.7^n$ היא $g=\lambda x.\frac{1}{1-7x}$

כעת, נשתמש בסעיף ① ונקבל כי הפונ' היוצרת היא: $f=\lambda x.g'(x)x=\lambda x.x\cdot\frac{+7}{(1-7x)^2}=\lambda x.\frac{7x}{(1-7x)^2}$

תרגיל 2:

מהי הסדרה המתאימה לפונ' היוצרת $f=\lambda x.\frac{1-5x}{2x^2-7x+3}$?

פתרון:

מתקיים כי: $2x^2-7x+3=(2x-1)(x-3)=2(x-\frac{1}{2})(x-3)$

נפרק לשברים חלקיים ונכתוב: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}x}{(x-3)(x-\frac{1}{2})}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{x-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}x=A(x-\frac{1}{2})+B(x-3)$

$x=3:$ $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\cdot 3=2\frac{1}{2}A /\cdot 2$

$1-15=5A$

$-\frac{14}{5}=A$

$x=\frac{1}{2}:$ $\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=-2\frac{1}{2}B$

$B=\frac{3}{10}$

$$\Rightarrow f=\lambda x.\frac{3}{10(x-\frac{1}{2})}-\frac{14}{5(x-3)}=\lambda x.\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{3(x-\frac{1}{3})}-\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(1-2x)}=$$

$$=\lambda x.\frac{14}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n x^n-\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{14}{15}3^{-n}-\frac{3}{5}2^n)x^n$$

$\Leftarrow$ זו הסדרה, נוצרת הסדרה: $a_n=\lambda n.\frac{14}{15}\cdot 3^{-n}-\frac{3}{5}\cdot 2^n$

דוגמאות:

① מס' האפשרויות לבחירת 2 מס' מ-1 עד 3 אשר סכומם 5.

הפונ' היוצרת: $\lambda x.(x^1+x^2+x^3)(x^1+x^2+x^3)=\lambda x.x^2+2x^3+3x^4+2x^5+x^6$

② מס' הפתרונות הטבעיים למשוואה $x_1+x_2+x_3=40$ כך ש- $x_1\geq 4$, $x_2\in\{0,1,2,3\}$, x_3 אי זוגי

נחפש את המקדם של x^{40} בביטוי: $\lambda x.(\sum_{i=4}^{\infty}x^i)(1+x^2+x^3)(\sum_{i \text{ אי זוגי}}x^i)$

$$\sum_{i=0}^{\infty}x^i-\sum_{i=0}^{\infty}(x^2)^i=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}$$

תרגיל 3:

טענה: הפונ' $\lambda x.\frac{1}{(1-x)^n}$ יוצרת את הסדרה $\lambda k.S(n,k)$

טענה: אם f יוצרת את הסדרה $\lambda n.a_n$ אז $\lambda x.\frac{f(x)}{1-x}$ יוצרת את: $\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k$

① מהטלת 5 קוביות מיצאו את מס' האפשרויות לקבל סכום של 17.

② מהטלת 5 קוביות, מצאו את מס' האפשרויות לקבל ~~סכום~~ לכל היותר 17.

פתרון:

① הפונ' היוצרת המתאימה: $f=\lambda x.(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5=$

$$=\lambda x.(x(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5))^5=\lambda x.x^5(\sum_{i=0}^{5}x^i)^5=\lambda x.x^5\cdot(\frac{1-x^6}{1-x})^5$$

ומכאן נראה שהבעיה שקולה למציאת המקדם של x^{12} בפונ': $\tilde{f}=\lambda x.(\frac{1-x^6}{1-x})^5=$

$$=\lambda x.\frac{1}{(1-x)^5}\cdot(1-x^6)^5$$

נשתמש בפיתוח של הבינום ושל הבינום השני: ונקבל: $\tilde{f}=\lambda x.(S(5,0)+S(5,1)x+S(5,2)x^2+\dots)(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-x^6)^k)$

$$=\lambda x.((\binom{4}{0}+\binom{5}{1}x+\binom{6}{2}x^2+\dots)(1-\binom{5}{1}x^6+\binom{5}{2}x^{12}-\binom{5}{3}x^{18}+\dots)\Rightarrow$$

המקדם של x^{12}: $\underline{\binom{5}{2}\binom{4}{0}+\binom{5}{1}\binom{10}{6}+\binom{16}{12}}$

המשך פתרון תרגיל 3:

② מהכפל הקודם ומהטענה נפתור ע"י מציאת המקדם של x^{12} בפונ' הבאה:

$$g=\lambda x.\ \frac{f(x)}{1-x}=\lambda x.\ \frac{1}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^5=\lambda x.\ \frac{(1-x^6)^5}{(1-x)^5}$$

⇐ תשובה סופית: המקדם המבוקש הינו: $\underline{\binom{5}{0}\binom{5}{2}-\binom{11}{6}\binom{5}{1}+\binom{17}{12}}$

תרגיל 4:

הוכ' חח"ע בין מס' החלוקות של n למחוברים שונים מתחלקים ב-3 שווה למס' התמורות של n בהן אף מחובר אינו מופיע יותר מ פעמיים.

פתרון חלקי:

נסמן ב-f את הפונ' היוצרת של מס' החלוקות למחוברים שונים מתחלקים ב-3:

$$f=\lambda x.\ \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)}_{\text{בחירת }1}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^{2i}\right)}_{\text{בחירת }2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^{4i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^{5i}\right)\ldots\ldots$$

נסמן ב-g את הפונ' היוצרת של מס' התמורות שבהן אף מחובר לא מופיע פעמיים:

$$g=\lambda x.\ \left(\sum_{i=0}^{2}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2}x^{2i}\right)\left(\sum_{i=0}^{3}x^{3i}\right)(\ldots$$

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{(1-x^4)}\cdot\frac{1}{(1-x^5)}\cdot\frac{1}{(1-x^7)}\qquad \overset{?}{=}\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-(x^2)^3}{1-x^2}\cdot\frac{1-(x^3)^3}{1-x^3}$$

↓

דברים מצטמצמים והפונ' יוצאות שוות ☺

טענה: לכל $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$

⇐ מסקנה: הפונ' $f=\lambda x.e^x$ יוצרת את הסדרה $\boxed{\lambda n.\ \frac{1}{n!}}$

הגדרה: הפונ' הטריג' ההיפרבוליות:

$$\sinh=\lambda x.\ \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n\text{ אי-זוגי}}\frac{x^n}{n!}$$

$$\cosh=\lambda x.\ \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n\text{ זוגי}}\frac{x^n}{n!}$$

תרגיל 5:

בכמה מחרוזות באורך 100 של תווים מתוך $\{1,2,3,4,5\}$ התווים 1 ו-2 מופיעים מס' זוגי של פעמים?

פתרון: "שקול" למס' הסדרות שבהן ניתן לחלק 100 כדורים ל-5 תאים כך שבשני הראשונים יש מס' זוגי של כדורים. לדוגמא: ל-$(10,20,35,35,0)$ יהיו $\frac{100!}{10!20!35!35!}$ [illegible]

הפונ' היוצרת (לו הכדורים זהים): $\lambda x.\ (1+x^2+x^4+\ldots)^2(1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$

$$\lambda x.\ 100!\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)=\lambda x.\ 100!\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^3=\lambda x.\ \frac{e^{5x}+2e^{3x}+e^{x}}{2}$$

⇐ המשך הפתרון:

$$= \lambda x. \ \frac{100!}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) =$$

$$= \lambda x. \ \frac{100!}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5^n+2\cdot 3^n+1)x^n}{n!}$$

ולכן הפתרון הוא (עבור $n=100$): $\frac{1}{4}(5^{100}+2\cdot 3^{100}+1)$ ∎