תרגול 11:

הבינום של ניוטון: לכל x,y ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

* מקרה פרטי חשוב: $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$

זהות פסקל: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

זהות נוספת: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

תרגיל 1: הוכיחו ① לכל n,k טבעיים ו-x ממשי: $\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{n}=\binom{x+n+1}{n}$

② לכל $m\le n$ $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$

פתרון:

① נוכיח באינדוקציה על n. עבור n=0: $\binom{x+0}{0}=\binom{x+0+1}{0}$ ✓

נניח נכונות עבור n-1 ונוכיח עבור n:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{x+k}{k}\right)+\binom{x+n}{n}=$$

$$\underset{\text{הנ"א}}{=}\binom{x+n}{n-1}+\binom{x+n}{n}\underset{\text{פסקל}}{=}\binom{x+n+1}{n}\ \blacksquare$$

② נשים לב כאשר $k<m$, $\binom{k}{m}=0$, לכן: $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{k-m}$

נצ"ב: $k'=k-m$:

$$=\sum_{k'=0}^{n-m}\binom{k'+m}{k'}\underset{\text{סעיף 1}}{\Longrightarrow}=\binom{m+(n-m)+1}{n-m}=\binom{n+1}{n-m}=\binom{n+1}{m+1}\ \blacksquare$$

תרגיל 2: פתרו: $2^2\binom{n}{1}+2^4\binom{n}{2}+2^6\binom{n}{3}+\dots+2^{2n}\binom{n}{2}$

פתרון:

$$\sum_{i=1}^{n}2^{2i}\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}4^i\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}4^i\binom{n}{i}+4^0\binom{n}{0}-4^0\binom{n}{0}\underset{\text{בינום}}{=}(1+4)^n-1=5^n-1\ \blacksquare$$

תרגיל 3: פתרו: $\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}7^i$

מתקיים כי: $i\cdot\binom{n}{i}=i\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}=n\cdot\binom{n-1}{i-1}$

נצ"ב חזרה:

$$\sum_{i=1}^{n}n\cdot\binom{n-1}{i-1}7^i=n\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}7^i=7n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}7^{i-1}=$$

$$\underset{\substack{\text{נצ"ב}\\k=i-1}}{=}7n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}7^k=7n(7+1)^{n-1}=7n\cdot8^{n-1}\ \blacksquare$$

עקרון שובך היונים: אם נחלק n+1 יונים ל-n שובכים, יש שובך ובו לפחות 2 יונים.

הנוסח המוכלל: אם נחלק n יונים ל-k שובכים, יהיה שובך עם לפחות $\lceil\frac{n}{k}\rceil$ יונים.

תרגיל 5: בכיתה 30 תלמידים, כל אחד מהתלמידים שלח משלוח מנות ל-15 מחבריו לכיתה. הוכיחו שיש 2 תלמידים בכיתה שקיבלו משלוח מנות זה מזה.

פתרון: - בסך הכל נשלחו $30\cdot15=450$ משלוחי מנות.

- כל אחד ממשלוחי המנות הללו נשלח בין $\binom{30}{2}=29\cdot15<30\cdot15$ זוגות תלמידים.
- נתאים לכל משלוח מנות את זוג התלמידים שביניהם הוא נשלח.
- לפי עקרון שובך היונים, ישנם 2 משלוחי מנות שהותאמו לאותו זוג. שני תלמידים אלו קיבלו משלוח זה מזה.

תרגיל 6: על 6 נק' במישור, כך ששום שלוש מהן לא על אותו ישר, מעבירים בין כל 2 נק' ישר הצבוע כחול או אדום. הוכח כי בהכרח ייווצר משולש שכל צלעותיו באותו צבע.

פתרון: נתבונן בנק' כלשהי במישור. יוצאים ממנה 5 ישרים לשכניה. נתייחס לישרים כיונים ולצבעים כשובכים. אזי מעקרון שובך היונים יש לפחות $3=\lceil\frac{5}{2}\rceil$ ישרים מאותו צבע.

נניח בה"כ כי ישנם 3 ישרים כחולים היוצאים מהנק' (אם אדומים - נחליף בין הצבעים בהמשך).

נתבונן ב-3 נק' הקצה המתחברות בישרים אלו לנק' הראשונה.

נתבונן בישרים המחברים נק' אלו: אם בין הישרים עובר ישר כחול אז סיימנו - מצאנו משולש כחול - הנק' המקורית ו-2 הנק' על הישר.

אם לא - סיימנו, הרי מצאנו משולש אדום בין הנקודות הללו. ■

נוסחת הכלה-הדחה: תהיינה A,B,C קב' סופיות המוכלות בקב' סופית U.

אזי:
$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$$

באופן כללי: עבור $A_1, A_2, \ldots A_n$:
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\ldots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|$$

לרוב, נחשוב על כל קבוצה כמייצגת איברים המקיימים תכונה מסוימת ונחשב את מס' האיברים שלא מקיימים אף תכונה: $\left|\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A_i}\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$

משפט: מס' הפרות סדר של n איברים (כלומר מספר התמורות כך שאף איבר לא נמצא במקומו המקורי), נסמנו ב- D_n: $\boxed{D_n=\left[\frac{n!}{e}\right]}$

n זוגי: עיגול מעלה
n אי-זוגי: עיגול מטה

המשך בדידה תרגול 11:

תרגיל 8: בכמה דרכים ניתן לחלק 80 כדורים זהים ל-5 תאים (שונים), כך שבאף תא לא יהיו יותר מ-24 כדורים.

פתרון: נגדיר את U להיות אוסף החלוקות ללא אילוצים: $|U|=\binom{80+5-1}{80}$

נגדיר את A_i $(1\le i\le 5)$ להיות אוסף החלוקות כך שבתא i יש לפחות 25 כדורים. אזי, לכל $1\le i<j<k\le 5$,

$$|A_i|=\binom{80-25+5-1}{80-25}=\binom{59}{55}$$

$$|A_i\cap A_j|=\binom{80-25\cdot 2+5-1}{80-25\cdot 2}=\binom{34}{30} \qquad |A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{80-25\cdot 3+5-1}{80-25\cdot 3}=\binom{9}{5}$$

מכאן שהפתרון הוא:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{5}\bar{A_i}\right|=\binom{84}{80}-5\cdot\binom{59}{55}+\binom{5}{2}\cdot\binom{34}{30}-\binom{5}{3}\binom{9}{5} \blacksquare$$

תרגיל 9: מהו מס' השלמים בין 1 ל-300 שאינם מתחלקים ב- 2,5,11

פתרון: העולם שלנו, U, הוא מס' השלמים בין 1 ל-300. $|U|=300$

נגדיר את: A_1: מס' השלמים בין 1 ל-300 שמתחלקים ב-2: $|A_1|=150$

A_2: " — " — ב-5: $|A_2|=60$

A_3: " — " — ב-11: $|A_3|=27$

$$|A_1\cap A_2|=\frac{300}{2\cdot 5}=30 \ ; \ |A_1\cap A_3|=\left\lfloor\frac{300}{22}\right\rfloor=13 \ ; \ |A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{300}{5\cdot 11}\right\rfloor=5, \ |A_1\cap A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{300}{2\cdot 5\cdot 11}\right\rfloor=2$$

ומכאן הכל:

$$|\bar{A_1}\cap\bar{A_2}\cap\bar{A_3}|=300-150-60-27+30+13+5-2=109 \blacksquare$$

תרגיל 10: בתור לרבנות עומדים n זוגות, מתוכם k רוצים להתגרש והשאר רוצים להתחתן. מהו מס' האפשרויות לסדרם ב-2 טורים: טור נשים וטור גברים, כך ששני בני הזוג שרוצים להתגרש לא יעמדו זה מול זה?

פתרון: (כאשר $n=k$: ראשית נסדר את הגברים בתור - $n!$ אפשרויות. כעת, לכל אישה יש בדיוק מקום אחד בו אסור לה להיות - D_n אפשרויות. סך הכל: $\left[\frac{n!}{e}\right]\cdot n!$.)

כאשר $n\neq k$: נגדיר A_i, לכל $1\le i\le k$ להיות מס' הסידורים האפשריים כך שהזוג ה-i שרוצה להתגרש עומד זה מול זה. נחפש את $\left|\bigcap_{i=1}^{k}\bar{A_i}\right|$.

U יהיה אוסף כל הסידורים. נסדר תחילה את הגברים ואחר מכן נשים: $|U|=(n!)^2$

לכל i מ-1 עד k, כדי למצוא את A_i, נסדר את הגברים ואז ליד הגבר ה-i שרוצה להתגרש תעמוד רק אשתו לשעבר, והשאר ללא הגבלה: $|A_i|=n!(n-1)!$

באופן דומה, לכל $1\le i<j\le k$: $|A_i\cap A_j|=n!(n-2)!$

<u>המשך תרגיל ד</u>: באופן כללי, עבור $m \le k$ מתקיים:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots A_{i_m}| = n!\,(n-m)!$$

לכן לפי נוסחת ההכלה וההדחה:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}\right| = |U| - \sum_{i=1}^{k}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le k}|A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^k \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| =$$

$$= (n!)^2 - k\cdot n!\,(n-1)! + \binom{k}{2} n!\,(n-2)! - \binom{k}{3} n!\,(n-3)! + \dots + (-1)^k\, n!\,(n-k)! =$$

$$= n! \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (n-i)! \quad \blacksquare$$