20/10/13

בדידה - שיעור 3

על נוסחאות ועצמים

"שורה" במסגרת תורה פורמלית תקרא **נוסחה**.

נוסחא שאין בה משתנים חופשיים תקרא **פסוק**. במסגרת התורה הפסוק הוא **אמת** או שהוא **שקר**.

הנוסחא $x+1=5$ אינה פסוק. נוסחא שאינה פסוק תקרא גם **תבנית פסוק**.

לחלופין פסוק נקרא גם **נוסחה סגורה** ותבנית פסוק היא נוסחה שאינה סגורה.

* ($x+1$, $6+5$, 32 - כל אלה אינם נוסחאות אלא מספרים)
* $\{x \mid x^2+10x=39\}$ היא קבוצה.
* $\{3,-13\} = \{x \mid x^2+10x=39\}$ - זהו פסוק (אמת).
* 32 הוא מספר, אבל "32" כמו גם "14+18" הם שמות מספרים.

(הניסוח הפורמלי המדויק של הנ"ל מסובך עד כדי "יציאה מן הדעת").

↳ קבוצות, מספרים, פונקציות הם **עצמים** המהווים חלק מנוסחאות.

הנוסחאות עצמן אינן עצמים (בתורה עצמה, אבל כן של המטה תורה הדנה בהן).

נבחין בין **שמות עצם סגורים** שאין בהם משתנים חופשיים (כגון "$\{x \mid x^2+10x=39\}$" שהם שמות הקבוצה), **לשמות לא סגורים** שיכונו גם **תבניות** שבהן יש משתנים חופשיים (הדבקה) (כמו "x^2+5", "$\{x \mid x\neq a\}$" שאלו תבנית מספר ותבנית הקבוצה).

דוגמאות:

* $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ - נוסחא (רוצה להיות נוסחא סגורה, פסוק אמת, אבל הוסף תבנית פסוק
  * $x>5$ - נוסחא
* $(a+b)^2 = a^2+b^2$ - נוסחא (כ.ז נוסחא סגורה, פסוק שקר, אבל תבנית פסוק)
  * $x^2>25$ - נוסחא
* $x^2+10x=39$ - נוסחא (כ.ז משוואה, והיא תבנית פסוק)
  * אם אין ענן ואין גשם - נוסחא (צריך להוסיף לה זמן t ולה מקום x.)
* $y=x^2$ - נוסחא (כ.ז פונקציה, והיא תבנית פסוק)
  * אין עננים - נוסחא (פסוק)
* $y=ax^2$ - נוסחא (כ.ז פונק' עם פר' משר', אבל תבנית פסוק) תבנית פונקציה
  * אין גשם - נוסחא
* "$\int_0^t x^2dy$" - שם עצם (סגור) (כ.ז והוא אכן שם מספר)
* $\int_0^t t^2dt$ - שם עצם (פתוח)
* $x>5 \Rightarrow x^2>25$ - נוסחא (כ.ז נוסחא סגורה, פסוק אמת אבל זו בעצם תבנית פסוק במשתנה חופשי x).

כמעט כל אחד מהגדנו שימש אותנו בבי"ס כדי להבין משהו.

האם הוא ~~גם~~ אכן מבין זאת באופן פורמלי, ואם לא איך נתקן?

כמתים בסמנטיקה הקשירה:

1. את הטענה: הנוסחה $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ מתקיימת לכל הערכים הממשיים של a ושל b כותבים כך: $\forall a.\forall b: (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

אפשר גם לציין את היותם של a ו-b מס' ממשיים ע"י $\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R}: (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

אפשר גם $\forall a\in\mathbb{R}.\forall b\in\mathbb{R}.\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (נקודה=סוגר שמאלי הנסגר בסוף השורה).

$\forall$ "קרוא" כמת אוניברסלי או כמת כולל.

בתוך תחום הקשירה של $\forall a$, a אינו משתנה חופשי (להצבה) אלא קשור,

ו-$\forall$ הוא מציין קשירה.

2. החלפת הנוסחה $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ב- $(a+b)^2=a^2+b^2$ (עם הכמת $\forall$)

$\forall a.\forall b.\ (a+b)^2=a^2+b^2$. יהיה פסוק שקר כמו שהוא "רוצה להיות".

מאידך, $\exists a.\exists b.\ (a+b)^2=a^2+b^2$. זהו פסוק אמת.

$\exists$ הוא כמת הקיום. גם הוא מציין קשירה.

דוגמה $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists b\in\mathbb{R}\ (a+b)^2=a^2+b^2$ זה פסוק אמת (כי לכל a אפשר לבחור $b=0$).

תחשיב הפסוקים, על כל בניו, בתוספת הכמתים $\forall$ ו- $\exists$, וכללי ההכנסה והסילוק שלהם, הם הרובד הבא של המתמטיקה (היסודה של התורה המתמטית), ונקרא **תחשיב היחסים**.

כללי ההכנסה וההוצאה של $\forall$ ושל $\exists$ (הנ' ע' 13-16 בעמ' 26):

* כלל ההכנסה של $\forall$ (13):

$$\frac{T\vdash P(y|x)}{\forall x\ P}$$

פירושו: אם בתורה T אפשר להסיק (המשפט) את תבנית הפסוק P כאשר המשתנה x מוחלף בה במשתנה y אז באותה תורה אפשר לקשור את המשתנה x ע"י $\forall x$ בתבנית P.

באופן שקול: אם אפשר להוכיח נוסחא עבור משתנה כלשהו x מבלי להניח עליו דבר, מלבד הצהרה על הטיפוס שלו, כי אז ניתן לקשור אותו בכמת כולל.

מילות המפתח בפתיחת הוכחה כזו הן "יהי" (יהי x מס' ממשי...)

המשך מבידה שיעור 3

{ $(t|x)$ - מוצב t במקום x }

$$\frac{T \vdash P(t|x)}{\exists x\ P}$$

* **כלל ההכנסה של $\exists$ $(\exists I)$:**

אם אפשר להוכיח את תכונת P עבור ביטוי כלשהו, t, בתפקיד x, אזי $\exists x.P$.

נוכיח: $\forall x\in\mathbb{R}. \exists y\in\mathbb{R}.\ y>x$

יהי $x\in\mathbb{R}$. ידוע (הוכחה במסגרת תורת המספרים) ש- $x+1>x$.

ומכאן לפי כלל זה ("נציב" $x+1$ בתפקיד y) נקבל $\exists y.\ y>x$

לא אמרנו דבר על x, ולפי כלל 13: $\forall x. \exists y.\ y>x$ ∎

21/10/13

כדי להוכיח משפט הפותח ב- $\exists$, צריך להציג ל- $P(t|x)$ משמעות t משהו יחיד. די לכך בדוגמא.

כללי השלילה של הכמתים:

$$\neg(\forall x\ P) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P$$

$$\neg(\exists x\ P) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P$$

$$\Downarrow$$

כדי להפריך משפט הפותח ב- $\forall$, יש להוכיח את שלילתו. כלומר, להוכיח משפט הפותח ב- $\exists$ ולכן מספיקה דוגמא נגדית.

כלל α לקשירת משתנים:

יהיה x משתנה קשור. אפשר להחליף אותו בכל משתנה אחר y, בתנאי שאין ל- y מופע חופשי בתחום הקשירה.

(לדוגמא $\forall x\in\mathbb{R}.\ x^2>0 \Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R}.\ y^2>0$)

כיצד שוללים? שלילה פורמלית של נוסחאות ובהן קשרים/משתנים/כמתים...

		ביטוי	שלילתו		ביטוי	שלילתו	
	קשרים:	A	$\neg A$	כמתים:	$\forall x\ P$	$\exists x\ \neg P$	דמורגן מוכלל
כללי דה מורגן		$A\vee B$	$(\neg A)\wedge(\neg B)$		$\exists x\ P$	$\forall x\ \neg P$	דמורגן מוכלל
כללי דה מורגן		$A\wedge B$	$(\neg A)\vee(\neg B)$	מרתבנבב:	$a=b$	$a\neq b$	
		$A\Rightarrow B$	$A\wedge(\neg B)$		$a>b$	$a\leq b$	
		$A\Leftrightarrow B$	$(A\wedge(\neg B))\vee((\neg A)\wedge B)$		$a<b$	$a\geq b$	

נתבונן בדוגמא:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}.\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

משתנים קשורים: ε, δ, x כמו מופיעים   טיפוסים: ε, δ - חיוביים
x - ממשי

משתנים חופשיים: x_0, f $f(x)$ - פונק' ממשית

זוהי תכונה בפסוק במשתנים החופשיים פונק' f ונק' x_0

זוהי הגדרה פורמלית של: הפונקציה f רציפה בנקודה x_0.

שלילה פורמלית:

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}:\ |x-x_0|<\delta \wedge |f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$$

—

ייצוג פונקציות:

$y=x^2$ הוא "ייצוג" חוקי לפונק' המתאימה לכל מס' ממשי את ריבועו.

הדרך הנכונה נכתוב אותה: $\lambda x\in\mathbb{R}.\ x^2$

λ - מנגנון קשירה (הקושר במקרה זה את x).

הביטוי המופיע אחרי ה- . הוא ערך הפונק' עבור המשתנה.

מנגנון קשירה נוסף: $\{x \mid x^2+10x=39\}$

$\{x \mid P\}$

מנגנון קשירה המגדיר קבוצות.

דוגמא: $\{x\in\mathbb{C} \mid ax^2+bx+c=0\} = \left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$