בדידה אחרון =(

משפט העצים:

יהי T גרף בעל n קודקודים. התנאים הבאים שקולים:

(1) T הוא עץ

(2) T קשיר ויש בו n-1 קשתות

(3) T חסר מעגלים ויש בו n-1 קשתות

(4) T קשיר מינימלי

(5) T חסר מעגלים מקסימלי

(6) בין כל שני קודקודים יש ב-T מסילה יחידה.

(7) T קשיר ובכל תת גרף שלו יש קודקוד בדרגה קטנה מ-2 (0 או 1)

* גרף חסר מעגלים (השונה מהגדרת עץ) יקרא **יער**.

<u>משפט</u>: ביער בעל n קודקודים ו-c רכיבי קשירות מס' הקשתות הוא $n-c$

<u>הוכחה</u>: הטענה נכונה לגרף חסר קשתות בעל n קודקודים, ולכן n רכיבי קשירות: $n=c=\overset{n-c}{\cancel{\quad}}$. כל קשת נוספת מגדילה ב-1 את מס' ה קשתות ונפ' נמת הקשת הנוספת כיוון שאינה סוגרת מעגל (הרי צריך יער), מקטינה את מס' רכיבי הקשירות ב-1. לכן השוויון $\overset{\text{קשתות}}{m}=n-c$ נשמר.

מקרה פרטי:
⇐ כאשר הגרף קשיר מס' רכיבי הקשירות $C=1$ ולכן $n-1$ קשתות.

סכום הדרגות של כל הקודקודים בעץ בעל n קודקודים הוא: $2n-2$.

⇐ לכל עץ (עם $n\geq 2$ קודקודים) יש קודקודים בדרגה 1 - נקראים **עלים**
(הרי הדרגה הממוצעת לקודקוד $=2-\frac{2}{n}<2$ $\left(\frac{2n-2}{n}\right)$.

ביער מס' הקשתות <u>לכל היותר</u> $n-1$ ולכן ממוצע הדרגות שלו קטן מ-2 (תנאי 7)

<u>שאלה מבחינה</u>: האם ניתן לצבוע את קשתות הגרף השלם K_7 ב-3 צבעים, כך שבכל מעגל תהיינה שתי קשתות בצבעים שונים?

<u>פתרון</u>: באופן שקול, קב' הקשתות בכל צבע הוא יער. מכאן בכל קב' צבע יש לכל היותר 6 קשתות. מסה"כ לכל היותר 18 קשתות, אבל ב-K_7: $\binom{7}{2}=21$ קשתות, ומעקרון שובך היונים המובן אחת מקב' הקשתות בעלת יותר מ-7 קשתות.

<u>שאלה נוספת</u>: יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני יערות.

<u>הוכיחו</u>: בגרף $G=(V,\overset{E}{E_1\cup E_2})$ יש קודקוד בדרגה קטנה מ-4.

<u>הוכחה</u>: G_1 ו-G_2 הם יערות ולכן $|E_1|\le|V|-1$, $|E_2|\le|V|-1$

מכאן יש $|E|\le 2|V|-2$ ⇐ סכום הדרגות ב-G הוא לכן לכל

היותר $2\cdot(2|V|-2)=4|V|-4$ ומכאן שממוצע הדרגות הוא: $4-\frac{4}{|V|}<4$

⇐ יש קודקוד מדרגה קטנה מ-4 ■

2. נתונה סדרה $D=\langle d_1,d_2,\ldots d_n\rangle$ של מס' שלמים חיוביים שסכומם $2n-2$ $=\sum_{d_i}$

<u>הוכיחו</u>: קיים עץ ש-D היא סדרת הדרגות שלו.

<u>פתרון</u>: * עבור $n=2$ מתקיים $D=\langle 1,1\rangle$ וזהו העץ o——o

* עבור $n>2$ מתקיים $n<2n-2<2n$. הדרגה הממוצעת לכן גדולה מ-1,

קטנה מ-2 ⇐ אחד לפחות מאיברי הסדרה הוא 1 ולפחות אחד מהם הוא לפחות 2.

נני' בה"כ $d_1=1$, $d_n\ge 2$.

נשמיט מהסדרה את d_1 ונחסר 1 מ-d_n. הסדרה החדשה בת $k=n-1$ איברים

וסכומם $2k-2$ איברים. מהאינדוקציה זוהי סדרת הדרגות של עץ.

לקודקוד בדרגה d_n-1 נוסיף קשת והקודקוד שנה עלה, וקיבלנו את העץ המבוקש ■

<u>נוסחת קיילי וקוד פרופר</u>

3. כמה עצים על קב' הקודקודים $V=\{1,2,3,\ldots n\}$?

נסמן המספר המבוקש ב-T_n.

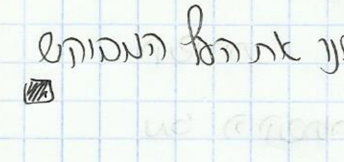
מתקיים: $\boxed{T_n=n^{n-2}}$ ← נוסחת קיילי

n	T_n
1	1
2	1
3	3
4	16
5	
6	

<u>הבנייה של פרופר</u>: התו הראשון של הקוד (המחרוזת) הוא

שכנו של העלה הקטן ביותר. נמחק מן העץ את העלה הקטן ביותר עם

הקשת שלו, ונמשיך התהליך עבור העץ החדש עד שנותרת קשת יחידה



ושני עלים: $\langle 11,1,6,6,1,1,8,6,9\rangle$

סדרה זו מגדירה באופן יחיד את העץ המתאים.

מס' הקודקודים = אורך הקוד + 2. דרגת כל קודקוד = מס' ההופעות שלו + 1

$\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\4,&1,&1,&1,&1,&4,&1,&2,&2,&1,&2\end{matrix}$:⇐ סדרת הדרגות

המשך בדידה אחרון

שחזור הבנ״ת הקוד: את העלה הקטן ביותר (לפי הטבלה) נחבר לקודקוד שבמקום המחרוזת. נמחק את העלה מהטבלה ונקטין ב-1 את דרגת שכנו.

נקח את טבלת הדרגות של העץ הנותר. נמשיך באלגוריתם עד שנותרו רק שני עלים ונחבר אותם.

הראינו שהעץ ניתן לשחזור מהקוד שכבר התקבל מעץ.
אבל בהינתן מחרוזת כלשהי, מי יגיד לנו יתכן שאפשר להפעיל עליה את הבניה ההפוכה?
יתכן כן, גם אם אפשר מגוון שהתוצאה תהיה עץ?
נראה שהאלגוריתם לבניה ההפוכה לא יכול להיתקע: (תמיד יש עלה בטבלה שהמחרוזת אין עלה)
הטבלת הדרגות ההתחלתית: $n-2+n=2n-2$ = סכום הדרגות.
הקודקוד בקוד המחרוזת מופיע במחרוזת, ולכן דרגתו לפחות 2.
ממוצע הדרגות <2 ⇐ קיים עלה. לכן הצעד הראשון ניתן לביצוע.
הצעד מקטין ב-1 את מס' הקודקודים ומקטין ב-2 את סכום הדרגות.
הטבלה החדשה מאפשרת את המשך האלגוריתם.
בסוף שקיבלנו n הקודקודים ו-$n-1$ השתות, נראה שהתוצאה חסר מעגלים.
נניח שיש מעגל, אבל אז אי אפשר להפעיל בו את הקידוד - סתירה ☺

2. כמה עצים על הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 1,2,3 אינם עלים?
⇐ כמה מחרוזות באורך 5 מעל $\{1,2,\dots,7\}$ 1,2,3 מופיעים לפחות פעם אחת

נפתור באמצעות פונק' יוצרת מעריכית: עבור 1,2,3 הגורם: e^x-1

הפונק' שלנו: $f(x)=(e^x-1)^3\cdot e^{4x}$

$$f(x)=(e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1)\cdot e^{4x}=e^{7x}-3e^{6x}+3e^{5x}-e^{4x}$$

$$\boxed{a_5=7^5-3\cdot6^5+3\,5^5-4^5}$$

פתרון ע״י הכלה/הדחה: $N_0=7^5-3\cdot6^5+3\cdot5^5-4^5$

בכמה עצים מעל $\{1,2,\dots 8\}$ 1 אינו עלה, והדרגה של 2 ושל 3 זוגית.

פתרון: $\Leftarrow$ בכמה מחרוזות באורך $\overset{n-2}{6}$ מעל $\{1,2,..8\}$, 1 מופיע לפחות פעם אחת, 2 ו-3 מס' פעמים אי זוגי: F יוצרת מעריכית:

$$F(x)=(e^x-1)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot e^{5x}$$

בכמה עצים מעל $\{1,2,\dots 8\}$ בדיוק 2 עלים?

פתרון: העץ הוא מסלול: $\frac{8!}{2}$

בכמה עצים מעל $V=\{1,\dots 8\}$ 1 ו-2 הם שכנים (כלומר קשת $\{1,2\}$ שייכת לעץ).

[שאלת הכנה: בכמה עצים מעל $\{1,2,3\}$ מתקיים ש-$\{1,2\}$ היא קשת? $\leftarrow 2$]

בכל עץ $n-1$ קשתות. מס' העצים n^{n-2}

מס' הזוגות של קודקודים (הקשתות האפשריות): $\binom{n}{2}$

מס' הקשתות בכל העצים יחד: $(n-1)\cdot n^{n-2}$. כל קשת מופיעה

$\frac{(n-1)\cdot n^{n-2}}{\binom{n}{2}}$ פעמים, ולכן ב- $\frac{(n-1)n^{n-2}}{\binom{n}{2}}=2n^{n-3}$ עצים.