בדיה 26

מציאת משוואה לנוסחת נסיגה עם 3 נעלמים:

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2\cdot a_{n-3}$

$a_0 = 4 \quad a_1 = 3 \quad a_2 = 7$

משוואת הפולינום האופייני:

$$x^3 = 2x^2 + x - 2$$
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$
$$x^2(x-2) - (x-2) = 0$$
$$(x-2)(x-1)(x+1) = 0$$

פתרון כללי: $x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1 \Rightarrow a_n = a\cdot 2^n + b + c(-1)^n$

$$\begin{array}{ll} n=0 & a+b+c = 4 \\ n=1 & 2a+b-c = 3 \\ n=2 & 4a+b+c = 7 \end{array} \Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=1$$

פתרון כללי: $\boxed{a_n = 2^n + 2 + (-1)^n}$

שיטת ברנולי לקירוב שורש דומיננטי של פולינום:

תהיה $x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ משוואה פולי' מעלה n

שיש לה n שורשים שונים $\{x_1, \dots, x_n\}$, כאשר $|x_1|$ גדול מהערך

המקסימלי של כל יתר הפתרונות

למשוואת הנסיגה המתאימה: $a_{k+n} = \alpha_0 a_{k+1} + \alpha_1 a_{k+2} + \dots + \alpha_{n-1} a_{k-n-1}$

פתרון כללי: $a_k = C_1 x_1^k + C_2 x_2^k + \dots + C_n x_n^k$. מתקיים:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_1 x_1^{k+1} + \dots + C_n x_n^{k+1}}{C_1 x_1^k + \dots + C_n x_n^k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{C_1 x_1 + C_2\frac{x_2^{k+1}}{x_1^k} + \dots + C_n \frac{x_n^{k+1}}{x_1^k}}{\underbrace{C_1 + C_2 \frac{x_2^k}{x_1^k} + \dots + C_n \frac{x_n^k}{x_1^k}}_{\left(\left|\frac{x_2}{x_1}\right|<1\right)^k \to 0}} = \underline{x_1}$$

כיוון ש-$|x_1|$ גדול מכל יתר השורשים

לכן כדי למצוא קירוב של x_1 נחשב כמה (לפי הצורך) איברים של הסדרה ונחשב את $\boxed{\frac{a_{k+1}}{a_k}}$.

2. מצאו פתרון ~~[illegible]~~ מקורב של $x^3 = x^2 + x + 1$ נוסחת נסיגה

$$a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} + a_k$$

התחלה שרירותית

הסדרה: $\underbrace{0, 1, 1}, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274$

$\frac{149}{81} \approx 1.8395,\ \frac{274}{149} \approx 1.8389 \Rightarrow$ הפתרון $\underline{1.839}$.

שאלות מבחינה לפני שנתיים

שאלה 6: בכמה מחרוזות באורך n מעל $\{0,1,2,3,4\}$ כך שאין 00 או 10?

נסמן הפתרון ב- a_n. כל המחרוזות הכנו המתחילות בספרה שונה 0 הוא $4a_{n-1}$ (כי יש 4 ספרות כאלה), ושמתחילות ב-0 יש $3a_{n-2}$: $a_n=4a_{n-1}+3a_{n-2}$

תנאי התחלה: $a_1=5$, $a_0=1$

משוואת הפולינום האופייני:
$$x^2=4x+3$$
$$0=x^2-4x-3 \Rightarrow x_1=2+\sqrt{7}$$
$$x_2=2-\sqrt{7}$$

$a_n=a(2+\sqrt{7})^n+b(2-\sqrt{7})^n$:
$n=0$ $\quad a+b=1 \rightarrow a=1-b$ ......
$n=1$ $\quad a(2+\sqrt{7})+b(2-\sqrt{7})=5$

נמצא את a ו-b וזהו הפתרון.

שאלה 7: (בהמשך לשאלה 6) מצאו קירוב עד ספרה אחרי הנק' ל- $\sqrt{7}$

משוואת הנסיגה של שאלה 6: $a_n=4a_{n-1}+3a_{n-2}$ (היחס יהיה $2+\sqrt{7}$ ונחסר 2)

איברי הסדרה הראשונים: $1, 5, 23, 107, 497$

* חשבו את $\sqrt{3}$: הפתרון הטיבי: $x^2=3$ ← משוואת נסיגה $a_{n+2}=3a_n$

והסדרה בנויה מ-2 סדרות בלתי תלויות כך ש~~ההפרשים~~ היחס בין עוקבים לא מתכנס.

$\quad$ 2 1.5 2 1.5 2
לדוג': 1, 2, 3, 6, 9, 18 .....

⇐ הנוכחנו נובעת כי יש שני שורשים שונים ושווים בערכם המוחלט - אין שורש דומיננטי!

לכן, נבנה משוואה ששורשיה $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$: $x^2=2x+2$

שאלה 9: כמה ריבועים בלוח משובץ $n\times n$ שקודקודיהם נקודות סריג?

רמז: היכן הפינה השמאלית התחתונה של ריבוע $k\times k$?

הפתרון: $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

המשך בדידה 26:

תורת הגרפים

גרף (כוסי): $G=\langle V,E\rangle$ (סימון מקובל $G=(V,E)$)

מורכב מקבוצה (סופית) V של **קודקודים** (או צמתים)

וקבוצה (סופית) E של **קשתות** (או מקבוצות) כאשר לכל קשת צמד קודקודי קצה.

מבחינים בין **גרף מכוון** שבו הקצוות של קשת הן זוג סדור, לבין גרף **לא מכוון** שבו הן קבוצה של שני איברים או סינגלטון. אם לא נאמר אחרת נעסוק בגרפים לא מכוונים.

__בדיאגרמה של גרף__: הקודקודים מוצגים ע"י נקודות (או עיגולים קטנים), והקשתות ע"י קטעים או עקומים בין קודקודי הקצה שלהן (או חצים בגרף מכוון).

שתי הקשתות בעלות אותם קצוות נקראות **מקבילות** (כגון)

בגרף מכוון נבחין בין קשתות מקבילות ( ) לבין **אנטי מקבילות** ( ).

קשת שקצותיה שניהם אותו קודקוד היא **לולאה**.

דרגה של קודקוד היא מס' הקשתות ש-x הוא קצה שלהן, מסמנים אותה $d(x)$.

לצורך הדרגה לולאה נמנית פעמיים. בגרף מכוון מבחינים בין __דרגת כניסה__ $d^-(x)$ __ודרגת יציאה__ $d^+(x)$

⚠ __תרגיל__: הביאו גרף שאין בו 2 קודקודים בעלי אותה ~~...~~ דרגה. פתר' ○ ,

(מקובל בהגדרה $V\neq\emptyset$)

* כנ"ל, גרף בעל 2 קודקודים לפחות -

• כנ"ל ללא לולאות:

⚠ גרף ללא לולאות וללא קשתות מקבילות נקרא **גרף פשוט**

• כנ"ל, גרף פשוט: לא אפשרי! בגרף פשוט בעל 2 קודקודים או יותר יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

__הוכחה__: נסמן את מס' הקודקודים ב-n. הדרגה המקסימלית של קודקוד $n-1$, המינימלית 0 (n קודקודים ו-n דרגות). קודקוד בדרגה $n-1$ מחובר לכל האחרים, וקודקוד בדרגה 0 אינו מחובר לאף אחד אחר ← אם x בדרגה $n-1$ ו-y בדרגה 0 יוצא ש $0=n-1 \Leftarrow n=1$

לכן ל-$n>1$ לא ייתכן גם קודקוד בדרגה $n-1$ וגם קודקוד בדרגה 0, ומכאן שמס' הקודקודים n, וכמ' הדרגות האפשריות $n-1$ ולפי שובך היונים 2 קודקודים מאותה דרגה ■

משפט: $\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$ (כמות הקצוות של הקשתות)

הגדרות פורמליות תזו שקוויות!

(1) בנוסף ל- V ו- E, ניתן להגדיר פונ' המתאימה לכל קשת זוג קודקודי קצה.