הרצאה 25

פתרון משוואות נסיגה ליניאריות הומוגניות במקדמים קבועים בשיטת הפולינום האופייני:

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

נחפש עבור משוואת הנסיגה של פיבונאצ'י פתרון מהצורה $\lambda n.x^n$ כאשר x קבוע.

נניח - $x^{n+2}=x^{n+1}+x^n$ (x המקיים לכל n)

נניח $x\neq 0$ ונקבל ע"י צמצום ב- x^n: $x^2=x+1$

פתרון המשוואה: $x_1=\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}$ $x_2=\beta=\frac{1-\sqrt5}{2}$

ומכאן $\lambda n\in\mathbb{N}.\alpha^n$ כמו גם $\lambda n\in\mathbb{N}.\beta^n$ הם פתרונות למשוואת הנסיגה.

⇐ אוסף כל הפתרונות למשוואת פיבונאצ'י הינו מרחב ליניארי (סגור לסכום ולכפל ב"סקלר") הנפרש ע"י (α,β).

מכאן שלכל שני קבועים a ו- b: $\lambda n.a\alpha^n+b\cdot\beta^n$ גם הינו פתרון למשוואה.

נמצא פתרון כזה המקיים: $a_0=0$, $a_1=1$:

$$\begin{cases} a+b=0\Rightarrow a=-b & n=0\\ a\alpha+b\beta=1 & n=1\end{cases}$$

$a(\alpha-\beta)=1$

$a=\frac{1}{\frac12+\frac{\sqrt5}{2}-\frac12+\frac{\sqrt5}{2}}=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow b=-\frac{1}{\sqrt5}$

⇐ הפתרון לסדרת פיבונאצ'י: $\boxed{a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}$

מתקיים: כל פתרון למשוואת פיבונאצ'י נקבע באופן יחיד ע"י תנאי התחלה a_0,a_1.

כדי נקבל פתרון מהצורה $a\alpha^n+b\beta^n$ עבור תנאי התחלה כלשהם a_1,a_0

נציב: $n=0$ - $a+b=a_0$

$n=1$ $a\alpha+\beta b=a_1$

לכל a_0,a_1 יש למערכת הנ"ל פתרון יחיד כי הדטרמיננטה של המערכת

הינו: $\det\begin{pmatrix}1&1\\ \alpha&\beta\end{pmatrix}=\beta-\alpha\neq0$ ולכן קיים תמיד פתרון יחיד מהצורה $a_n=a\alpha^n+b\beta^n$

⇐ הוכחנו ש- $\boxed{\left\{\lambda n.\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n,\ \lambda n.\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}}$ היא בסיס למרחב הפתרונות של משוואות ליניארי.

נפתור בשיטת הפולינום האופייני את המשוואה $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ ($n\geq2$ ל)

משוואת הפולינום האופייני היא: $x^2=5x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Rightarrow x_1=3,\ x_2=2$ $(x-2)(x-3)=0$

הפתרון הכללי: $a_n=a\cdot3^n+b\cdot2^n$. נפתור עבור תנאי התחלה $a_0=0$, $a_1=1$

$$\begin{cases}0=a+b\\ 1=3a+2b\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}1=3a-2a\Rightarrow a\\ b=-1\end{matrix}\Rightarrow a_n=3^n-2^n$$

ג) בכמה מחרוזות בינאריות באורך n אין שני אפסים עוקבים?

נסמן הפתרון ב- a_n. אם הספרה הראשונה היא 1: מס' האפשרויות להשלמה a_{n-1}

אם הספרה הראשונה היא 0: מס' האפשרויות להשלמה הוא a_{n-2} (כי השנייה חייבת להיות 1)

סה"כ מתקיים ש- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ בתנאי התחלה: $a_0=1, a_1=2$ התאמה של הגדרה (המקורית)

ב) המקרה הכללי:

משוואות נסיגה הומוג' לינארית מסדר n הינן מהצורה: $\forall k.\ a_k$

$$a_{k+n} = \alpha_0 a_k + \alpha_1 a_{k+1} + \dots + \alpha_{n-1} a_{k+n-1}$$ → α_i קבועים

משוואת הפולינום מתקבלת מהחלפת a_{k+i} ב- x^i.

$$x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_1 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

נניח שלפולינום האופייני n שורשים שונים; $x_1, \dots x_n$

כך שלכל $1 \le i \le n$ $\forall k.\ x_i^k$ הוא פתרון למשוואה,

ואוסף הפתרונות הוא מרחב לינארי, נראה ש- $\{\forall k. x_1^k, \forall k. x_2^k, \dots, \forall k. x_n^k\}$

הוא בסיס למרחב הפתרונות.

<u>הוכחה</u>: הפתרון מוגדר באופן יחיד ע"י תנאי התחלה $a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ (הוכחה באינדוקציה)

נראה קיום פתרון יחיד: $a_k = c_1 x_1^k + c_2 x_2^k + \dots + c_n x_n^k$

נציב $k=0,1,\dots n-1$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_n = a_0 & k=0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = a_1 & k=1 \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \dots + c_nx_n^2 = a_2 & k=2 \\ \vdots & \\ c_1x_1^{n-1} + c_2x_2^{n-1} + \dots + c_nx_n^{n-1} = a_{n-1} & k=n-1 \end{cases}$$

המטריצה של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$ ← **מטריצת ואן דר מונדה!**

הדטרמיננטה שלה היא: $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$

⇐ הנחנו כי לכל $i \ne j$: $x_i \ne x_j$ לכן הדטרמיננטה $\ne 0$ ולכן קיים פתרון יחיד

לכל $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ כנדרש ■

המשך בדיקה 25:

שיטת ברנולי לקירוב משוואות פתרונות למשוואות פולינומיות

כאשר $|\beta|<|\alpha|$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a\alpha^{k+1}+b\beta^{k+1}}{a\alpha^{k}+b\beta^{k}} = \frac{\alpha+\frac{b}{a}\cdot\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k}{1+\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$$

חישבנו "יחס" $\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx 1.6180$ בסדרת פיבונאצ'י.

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \overset{?}{\approx} 1.6180$$

$$\sqrt{5}+1 \approx 3.2360$$

$$\sqrt{5} \approx 2.2360$$