בדידה 11

פונקציות יוצרות:

נוסחת הבינום של ניוטון:

מהו מקדם X^2 בפיתוח $(1+X)^4$?

$(1+X)^4=(1+X)(1+X)(1+X)(1+X)$

לפי חוק הפילוג, מכפלת סכומים היא סכום כל המכפלות של מחובר אחד מכל גורם.

לקבלת X^2 יש לבחור שניים מהגורמים a,b,c,d ולקחת מהם את המחובר X.

מס' האפשרויות לבחירת זוג כזה - $6=\binom{4}{2}$, וזהו אכן המקדם המבוקש.

$\Downarrow$

מקדם X^k בפיתוח $(1+X)^m$ הוא מספר האפשרויות לבחירת k גורמים מתוך m ומהם לקחת המחובר X.

מקדמים בינומיאליים

מקדם X^k בפיתוח $(1+X)^m$ הוא לכן $\binom{m}{k}$ $\overbrace{(1+X)(1+X)\cdots(1+X)}^{m}$

$$(1+X)^m=1+X+\binom{m}{2}X^2+\dots+\binom{m}{m}X^m=\boxed{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^k}$$

* מהו מקדם X^3 בפיתוח $(1+X+X^2+X^3)^3$?

באופן שקול - $\underbrace{(1+X+X^2+X^3)}_{a}\underbrace{(1+X+X^2+X^3)}_{b}\underbrace{(1+X+X^2+X^3)}_{c}$ ← $S(3,3)$ aac

⇐ כלומר בכמה אופנים ניתן לבחור a-ים, b-ים ו-c-ים (ע"ח) בסך הכל שלושה.

~~מספר האפשרויות לבחירת ("בחירה") של 3 איברים מתוך 3 עם חזרות {a,b,c}~~.

מקדם X^3 בפיתוח $(1+X+X^3+X^4+X^5)^3$ הוא עדיין $S(3,3)$ כי מה הגורמים X^5, X^4 אי אפשר להשתמש כדי לקבל X^3.

כלומר מפיתוח $(1+X+X^2+X^3+\dots+X^k+\dots)^3$ עדיין מקדם X^3 הוא $\boxed{S(3,3)}$

כי כל המקדמים X^k, $k>3$ לא רלוונטיים.

* מהו מקדם X^k בפיתוח $(1+X+X^2+\dots+X^k+\dots)^m=(\sum_{k=0}^{\infty}X^k)^m$? S(

* מהו מקדם X^k בפיתוח $\left(\frac{1}{1-X}\right)^m$? לפי פיתוח מקלורן מקדם X^k

מפיתוח הפונקציה f: ~~סימון~~ $f=\lambda x.f(x)$ הוא: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}X^k$

⇐ המקדם הוא $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

כפי שעבר - $\downarrow$

עבור $(1-X)^{-m}$ נקבל: $\frac{m(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+k-1)}{k!}=\frac{(m+k-1)!}{k!}$

__הגדרה__: הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה $\lambda k\in\mathbb{N}. a_k$ היא: $\boxed{\lambda x. \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}$

$$= \lambda x.\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

הרדיוס הוא תחום ההתכנסות של הטור והוא תלוי בסדרה.

__מצב שני__: פונקציה ממשית f המקיימת את תנאי מקלורין יוצרת את הסדרה $\boxed{\lambda k. \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$

* הפונקציה היוצרת של הסדרה $\lambda k. \binom{n}{k}$ היא $\lambda x. (1+x)^n$

* הפונקציה היוצרת של: $\lambda x. \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \lambda k\in\mathbb{N}. \binom{n-1+k}{n-1} = \lambda k\in\mathbb{N}: S(n,k)$

* בזריקת 3 קוביות מה סביר יותר: סכום 10 או 3 מס' זוגיים?

← __זריקת 3 זוגיים__ 27 אופנים.

← __זריקת סכום 10__: הפ' היוצרת לזריקת קוביה היא: $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

זריקת 3 קוביות: $(x+x^2+\dots+x^6)(x+x^2+\dots+x^6)(x+\dots+x^6)$

ומכאן שהבעיה שקולה למציאת מקדם x^{10} בפונ' היוצרת הנ"ל.

$$\left(\frac{x-x^7}{1-x}\right)^3 = (x-x^7)^3(1-x)^{-3} = x^3 - 3x^9 + \underbrace{\dots x^{15} \dots - x^{21}}_{\text{חזקה גבוהה מן הנדרש}} = \frac{x^3}{(1-x)^3} - \frac{3x^9}{(1-x)^3}$$

$n=3$, $n-1=2$, $k=10$, $t=3$; $n=3$, $n-1=2$, $k=10$, $t=9$

* מקדם x^k בפתוח $\frac{x^t}{(1-x)^n}$ היא $\boxed{\binom{n-1+k-t}{n-1}}$

$$\Rightarrow a_{10} = \binom{2+10-3}{2} - 3\binom{2+10-9}{2} = \binom{9}{2} - 3\binom{3}{2} = 36-9 = 27$$