בדידה 21:

תרגיל: מבין הטבעיים הקטנים ממיליון מה יש יותר, כאלה שסכום ספרותיהם 48 או כאלה שסכום ספרותיהם גדול ממש מ-48?

מס' הספרות

$\boxed{\times\,|\,\vdots\,|\,\times\,|\,\times\,|\,\cdot\,|\,\vdots}$

* פישוט: כמה מס' טבעיים, קטנים ממיליון, סכום ספרות 26?

חלוקת k כדורים ל-n תאים כמספר הצירופים עם חז' של k מ-n: $S(n,k)=\binom{n-1+k}{n-1}$

במקרה זה $n=6, k=6, n-1=5$: $\binom{5+6}{5}=\binom{11}{5}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=462$

* כמה כאלה שסכום ספרותיהם קטן מ-6? $n=6\ \ n-1=5$, $k=5,4,3,2,1,0$: $\binom{5+5}{5}+\binom{9}{5}+\binom{8}{5}+\binom{7}{5}+\binom{6}{5}+\binom{5}{5}$

בשקול: $\boxed{\ \ |\ \ |\ \ |\ \ |\ \ |\ 3\ |\ \ _2}$ - 5 כדורים ל-7 תאים $\binom{6+5}{6}=\binom{11}{6}=\binom{11}{5}=462$

__עבור סכום 48__: ל-6 תאים שבכל אחד מהם 9 כדורים (סה"כ 56) נסיר 6 כדורים $\Leftrightarrow$ נחלק 6 כדורים ל-6 תאים $\Leftarrow$ $\binom{11}{6}=462$

בדומה מס' המספרים שסכום ספרותיהם __גדול מ-48__ (כמו אלה שקטן מ-5).

תהיה A קבוצה סופית. נסמן $P_{even}(A)$ אוסף תת הקבוצות של A בעוצמה זוגית. $P_{odd}(A)$ קבוצת תת הקבוצות של A בעוצמה אי-זוגית.

משפט: לקבוצה סופית A לא ריקה $|P_{even}(A)|=|P_{odd}(A)|$

הוכחה: יהיה $a\in A$ (לא ריקה). נגדיר $f: P_{even}(A)\to P_{odd}(A)$:

$$f=\lambda S\in P_{even}(A).\begin{cases} \cancel{P_{even}(A)\setminus\{a\}}\ S\setminus\{a\} & a\in S \\ S\cup\{a\} & a\notin S \end{cases}$$

תרגיל: בכמה אופנים ניתן להציב 8 צריחים ע"ג לוח שחמט ללא איום הדדי?

__פתרון:__ $8!$

* כנ"ל, כאשר אסור השימוש במשבצות האלכסון הראשי?

* כמה טבעיים בין 1 ל-30 אינם מתחלקים ב-2 או ב-3 או ב-5.

__פתרון:__ בסה"כ 30 מספרים, מהם 15 זוגיים, 10 מתחלקים ב-3 ו-6 מתחלקים ב-5. נוסיף $5+3+2$: $9-1=-1+5+3+2$ כנגד המס' 30 והפתרון $\underline{8}$.

נוסחת ההכלה/הדחה:

מאפשרת לחשב את מס' איברי איחוד של קבוצות, כאשר יודעים מספר האיברים בחיתוכים שלהן.

תהיה $F=\{A_1,\dots,A_k\}$ משפחת תת הקבוצות של קבוצה סופית U.

נסמן ב- N_0 את מס' האיברים שאינם שייכים לשום קבוצה מתוך F (המשלים של האיחוד $\cup F$).

$$N_0=\sum_{S\in F}(-1)^{|S|}|\cap S| \qquad \cap\phi=U$$

בדוגמה שלנו: $F=\{\overset{\text{זוגיים}}{A_2},\overset{\text{מתחלקים ב-3}}{A_3},\overset{\text{מתחלקים ב-5}}{A_5}\}$ ואז:

$$N_0=\overbrace{\cap\phi}^{U}-|\cap\{A_2\}|-|\cap\{A_3\}|-|\cap\{A_5\}|+|\cap A_2A_3|+|\cap A_2A_5|+|\cap A_3A_5|-|\cap A_2A_3A_5|=$$

$=$

תרגיל: כמה מחרוזות באורך 8 מורכבות מ- $\{1,2,3,4,5,6\}$ כך שכל אחת מהספרות 1,2,3 מופיעה לפחות פעם אחת?

$$6^8-\overset{\binom31}{3}\cdot5^8+\overset{\binom32}{3}\cdot4^8-\overset{\binom33}{}3^8$$

שיטה לחישוב הדברים בשיכור וזכרון ראשי:

נסמן חדש: כמה תמורות של $\{1,\dots,8\}$ שום איבר אינו במקומו ה"טבעי"?

$$N_0=8!-8\cdot7!+\overset{\binom82}{28}\cdot6!-\binom83 5!+\binom84\cdot4!-\binom85 3!+\binom86\cdot2!-\binom87\cdot1!+\overset{1}{1\cdot0!}$$

$$=8!-\frac{8!}{1!}+\frac{8!}{2!}-\frac{8!}{3!}+\frac{8!}{4!}-\frac{8!}{5!}+\frac{8!}{6!}-\frac{8!}{7!}+\frac{8!}{8!}=8!\left(\frac1{0!}-\frac1{1!}+\frac1{2!}-\frac1{3!}+\frac1{4!}-\frac1{5!}+\frac1{6!}-\frac1{7!}+\frac1{8!}\right)$$

נבדל מעט מ- של $1/e$ אם השארית קטנה מ- $\frac1{9!}$

$\Uparrow$

$N_0\approx8!\cdot\frac1e$ $\qquad\Leftarrow$ השארית קטנה מ- $\frac1{9!}$.

$\lceil 8!\cdot\frac1e\rceil$. $\qquad$ אבן כך הדבר!

משפט: טור מקלורן (טור טיילור סביב 0)

צירה של פולינום

בעבור כל פונ' f המקיימת את תנאי משפט מקלורן (טיילור סביב 0) מתקיים:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{k}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

$\Leftarrow$ פיתוח מקלורן של- e^x, $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac1{k!}\cdot x^k$$

נציב $x=-1$:

$$\frac1e=e^{-1}=1-\cancel{1}+\frac1{2!}-\frac1{3!}+\frac1{4!}-\frac1{5!}+\frac1{6!}-\frac1{7!}+\frac1{8!}-\frac1{9!}+\dots$$

משפט והגדרה: מספר התמורות של $\{1,\dots,n\}$ ללא נקודות שבת

מסומן D_n. תמורות כאלה נקראות אי סדרים סופיים:

$$D_n=\begin{cases}\left\lceil\frac{n!}{e}\right\rceil; & n\ \text{זוגי}\\ \left\lfloor\frac{n!}{e}\right\rfloor; & n\ \text{אי זוגי}\end{cases}$$

המשך בדידה 321

$e=2.71828...$

$$\circledast\ D_3 = \left\lfloor \frac{3!}{e} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{e} \right\rfloor = 2 \rightarrow \begin{array}{cc} 2 & \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right.\end{array}$$

אכן רק האפשרויות

הוכחת נוסחת ההכלה והדחה 3

נבנה מטריצה (לפי השני משתנים) שבה לכל $x\in A$ עמודה ולכל $S\subseteq F$ שורה.

במשבצת המתאימה יופיע 1 אם $x\in\cap S$ ו- $|S|$ זוגי

-1 אם $x\in\cap S$ ו- $|S|$ אי זוגי

0 אחרת.

אגף ימין של הנוסחא הוא סכום איברי המטריצה לפי <u>שורות</u>:

אגף שמאל של הנוסחא הוא סכום איברי המטריצה לפי <u>עמודות</u>-

בכל עמודה יופיע ההפרש בין מס' תת הקבוצות הזוגיות המכילות את x,

למס' תת הקבוצות האי זוגיות. סכום זה הוא אפס (הוכחנו $|P_{ev}(A)|=|P_{odd}(A)|$)

אלא אם כן $F_x=\emptyset$ ואז ה"סכום" הוא 1.

$\Downarrow$

נסיק סכום המטריצה כולה הוא: $N_0 \overset{\text{לפי הגדרה}}{=} \{x\in A \mid F_x=\emptyset\}$ כנדרש.

<u>נוכח שקול לנוסחת ההכלה</u>

$$|\cup F| = |\cup| - N_0 = \sum_{\substack{S\subseteq F \\ S\neq\emptyset}} (-1)^{|S|+1} |\cap S|$$