בדידה 1ב

ב) כמה הם 0^0 ? $? = |\emptyset \to \emptyset|$

כלומר כמה פונק' מהקב' הריקה לעצמה? יש בדיוק פונק' אחת רק,

הרי היא $\emptyset$. מכאן ש- $0^0=1$

* δ יחס מ- A ל- B: $\tilde{S}=\{\langle a,\{b\in B|\langle a,b\rangle\in S\}\rangle|a\in A\}$

- מתי $\tilde{S}$ פונק'? תמיד! $\tilde{S}=\lambda a\in A.\{b|\langle a,b\rangle\in S\}$

- A=B ו- S יחס שקילות. באילו תנאים נוספים $\tilde{S}$ הוא חח"ע?

כאשר S שקילות נקבל: $\tilde{S}=\lambda a\in A.[a]_S$ פונק' זו היא

חח"ע $\iff$ לשני איברים שונים מחלקות שקילות שונות $\iff$ כל איבר שקול

רק לעצמו $\iff$ $S=I_A$.

$\uplus$ = איחוד קב' זרות

משפט: לכל עוצמה אין סופית α מתקיים $\alpha+\aleph_0=\alpha$.

הוכחה: תהיה A בעוצמה אין סופית $\alpha=|A|$. כיוון ש- A אין סופית

קיימת $B\subseteq A$ כך ש- $|B|=\aleph_0$.

מתקיים $A=(A\setminus B)\uplus B$ מכאן $\alpha=|A|=|A\setminus B|+|B|=|A\setminus B|+\aleph_0$

$$\alpha+\aleph_0=(|A\setminus B|+\aleph_0)+\aleph_0 \underset{\uparrow}{=} |A\setminus B|+(\aleph_0+\aleph_0)=|A\setminus B|+\aleph_0=\alpha$$

אסוציאטיביות של חיבור

■

מקרה פרטי $\boxed{\aleph+\aleph_0=\aleph}$

$\boxed{\aleph=10^{\aleph_0}}$: צ"ל: $\aleph=|\{0,1,2,\ldots 9\}|\mathbb{N}\to\mathbb{N}|$.

שואלי שמאל, קבוצת הסדרות (האין סופיות) של ספרות עשרוניות.

הבעיה שקבוצת הסדרות האין סופיות של ספרות שאינן "מסתיימות"

ב- $\overline{999}$ עוצמה $\aleph$?

(כמו ב- A את רק' הסדרות שכן מסתיימות ב- $\ldots 999$: $abc\ldots x9999$

וזה שווה ל- $abc\ldots(x+1)00000$ וזהו מס' רציונלי.

$|A|$ מוכלת פיתוחים עשרוניים של מס' רציונליים, מכאן $|A|=\aleph_0$

מכאן שהוספה לקבוצת הספרות ללא $\overline{999}$ אינה משנה את

העוצמה $\aleph$.

כלומר הוכחנו $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$. "באותו אופן" $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

$\Downarrow$

$$\aleph\cdot\aleph = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

משפט: לכל קבוצה A: $|P(A)| = 2^{|A|}$

⊛ מקרה פרטי: $|P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph$

⚠ העוצמה $\aleph$ מסומנת גם ע"י C ונקראת עוצמת הרצף.

הוכחה: הרעיון הקונסטרוקטיבי: $\wp(A) =$ כל תת הקבוצות של A.

$A\to\{0,1\}$ היא קבוצת הפונק' מ-A ל-$\{0,1\}$ כלומר מ-A ל-$\{$כן, לא$\}$.

צ"ל: לכל תת קב' של A מתאימה פ' מ-A ל-$\{$כן, לא$\}$

נגדיר פ' המתאימה "כן" לאי' ששייכים ל-B, "לא" אחרת (מאחר כמו נשתמש ב-$0/1$).

נקרא לה הפונק' האופיינית: $\chi_B^{(A)}$

בהינתן A ו- $B\subseteq A$: $\chi_B^{(A)} = \lambda a\in A.\begin{cases}1; & a\in B\\0; & a\notin B\end{cases}$

המעבר מתת הק' לפונק' האופיינית שלה הוא (השתמשנו פ' הפיכה):

$H: P(A)\to(A\to\{0,1\})$: $H = \lambda B\in P(A).(\chi_B^{(A)} = \lambda a\in A.\begin{cases}1. & a\in B\\0. & a\notin B\end{cases})$

$H^{-1} = \lambda f\in A\to\{0,1\}.\{a\in A\mid f(a)=1\}$

הוכחנו $|P(A)| = 2^{|A|}$

סדרות בינאריות כפונק' אופיינית של קבוצות מספרים טבעיים:

* B קבוצת המספרים (הטבעיים) הזוגיים. $a_n = \begin{cases}1 & \text{אם n זוגי}\\0 & \text{אם n אי-זוגי}\end{cases}$ $\chi_B = \lambda n\in\mathbb{N}.a_n$

נראה: 10101010......

* $B = \{n\in\mathbb{N}\mid n\le 4\}$ — 11111000000...

* $B = \{n^2\mid n\in\mathbb{N}\}$: $\chi_B = \lambda m\in\mathbb{N}.\begin{cases}1 & \text{אם קיים n כך ש-}n^2=m\\0 & \text{אחרת}\end{cases}$

1100100001000001

סדר בין עוצמות:

הגדרה: $|A|\le|B| \iff$ קיימת f חח"ע $f: A\to B$

באופן שקול: קיימת g מ-B על A.

$A\subseteq B \wedge B\subseteq A \Rightarrow B=A$

יחס S ב-A "יקרא" סדר חלקי אם S רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי.

הגדרה: $|A|<|B| \iff |A|\le|B| \wedge |A|\neq|B|$

המשך בדיקה #17

נראה כי $\le$ קיימת $\{\langle A,B\rangle \mid f:A\to B$ חח"ע$\}$ הוא אכן סדר:

• ראשית, כיוון שהוא יחס בין קב' אין זה "באמת" יחס (אין קב' כל הקבוצות), אך מזה נתעלם.

• שנית האם הוא מוגדר היטב? כן. נב"ש שמתקיים $|C|=|A|$ ו- $|B|=|D|$

קיים $f:A\to B$ חח"ע $\Leftarrow$ קיים $g:\cancel{B}C\to D$ חח"ע.

תהיינה $g:A\to C$ הפיכה $(|A|=|C|)$

$h:B\to D$ הפיכה $(|B|=|D|)$

$f:A\to B$ חח"ע $|A|\le|D|$

צריך למצוא פ' חח"ע מ-C ל-D: $h\circ f\circ g^{-1}:C\to D$ חח"ע כי הרכבת חח"עיות ✓

• כעת נוכיח את שלוש התכונות:

* רפלקסיביות - צריך להראות קיום פ' חח"ע מהקבוצה לעצמה - ואכן I_A חח"ע.

* טרנזיטיביות - קיימות $f:A\to B$, $g:B\to C$ חח"ע. צריך פונק' חח"ע מ-A ל-C, ואכן $g\circ f:A\to C$ חח"ע כנדרש.

* אנטי סימטריות - נב' $|A|\le|B| \wedge |B|\le|A| \Leftarrow |A|=|B|$.

כלומר נב' שאם קיימות $f:A\to B$, $g:B\to A$ חח"ע אזי קיימת $h:A\to B$ הפיכה.

בעצם: תהיינה $A=\mathbb{N}$, $B=\mathbb{Q}^+$. פ' חח"ע מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{Q}^+$ היא $I_\mathbb{N}$, עם הטווח $\mathbb{Q}^+$.

בכיוון ההפוך: $2^a\cdot 3^b$ כאשר a ו-b המונה והמכנה של q בהצגה מצומצמת:

כיצד מ-2 פונק' אלו בונים פונק' הפיכה ??

<u>משפט קנטור ברנשטיין שרדר</u>: אם קיים $f:A\to B$, $g:B\to A$ חח"עיות

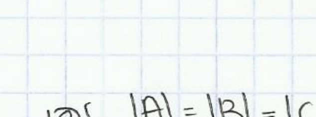
נובע קיים $h:A\to B$ הפיכה.

כמו כאן $\alpha\le\beta \wedge \beta\le\alpha \Leftarrow \alpha=\beta$ ו- α,β עוצמות.

<u>משפט</u>: אם $A\subseteq B$ אזי $|A|\le|B|$

צריך להראות פ' חח"ע $f:A\to B$ - למשל "השיכון" של A לתוך B I_A היא חח"ע.

* <u>מסקנה</u>: $A\subseteq B\subseteq C$ ו- $|A|=|C|$ אזי $|A|=|B|=|C|$ וזהו סנדוויץ'!



מכאן שהעוצמה של קטע חצי פתוח $=\aleph$.

כל כללי האריתמטיקה הנוגעים ל- $\leq$ תקפים רק על עוצמות מכל!

* יהיו α,β,γ עוצמות כך ש- $\alpha \geq \beta$ אזי:

- $\alpha+\gamma \geq \beta+\gamma$
- $\alpha\cdot\gamma \geq \beta\cdot\gamma$
- $\alpha^{\gamma} \geq \beta^{\gamma}$
- $\gamma^{\alpha} \geq \gamma^{\beta}$

} מותר להשתמש

<u>תרגיל:</u> חשבו $\aleph_0\cdot\aleph$: $\aleph\cdot 1 \leq \aleph_0\cdot\aleph \leq \aleph\cdot\aleph$

$= \aleph$ (המ"ש הקנטור ברנשטיין שרדר).