בדידה 13

* S יחס טרנזיטיבי, סימטרי ומלא! ב-A ⇐ הוא רפלקסיבי.

הוכחה: יהי $a\in A$ כך ש- $\langle a,a\rangle\in S \overset{\text{טרנזיטיבי}}{\Leftarrow} \langle b,a\rangle\in S \overset{\text{סימטרי}}{\Leftarrow} \langle a,b\rangle\in S$

מתקיים לכל a רק אם S מלא.

הגדרה: יחס טרנזיטיבי, סימטרי ורפלקסיבי ב-A ייקרא **שקילות** ב-A.

מחלקות שקילות

יהי $\sim$ יחס שקילות בקבוצה A.

נגדיר את מחלקת השקילות $[a]_\sim$ של איבר $a\in A$

על ידי: $[a]_\sim=\{b\in A \mid a\sim b\}$

משפט: אם $\sim$ שקילות ב-A ו- $a\sim b$ אזי $[a]_\sim=[b]_\sim$

הוכחה: נוכיח ~~בהכלה~~ $[b]_\sim\subseteq[a]_\sim$ וההפך סימטרי. $c\in[b]_\sim \Rightarrow c\in[a]_\sim$

$c\in[b]_\sim \Rightarrow c\sim b \underset{\text{טרנזיטיביות יחס שקילות}}{\wedge} \overset{\text{נתון}}{b\sim a} \Rightarrow c\sim a \Rightarrow c\in[a]_\sim$ ■

חלוקות (בלשון הספר: פירוקים)

חלוקה P של הקבוצה A, היא משפחת תתי קבוצות לא ריקות של A, כך שכל איבר של A נמצא בדיוק באחת מהן.

כלומר P מקיימת: אקסיומה A_1: $\forall a\in A.\ \exists M\in P.\ a\in M$

אקסיומה A_2: $\forall a\in A.\ a\in M_1 \wedge a\in M_2 \Rightarrow M_1=M_2$

$\Leftrightarrow M_1\cap M_2\neq\emptyset \Rightarrow M_1=M_2$

דוגמאות לחלוקות:

* חלוקת משולשים לפי הדמיון.

משפט: יהיה $\sim$ יחס שקילות ב-A, אזי $P=\{[a]_\sim \mid a\in A\}$

היא חלוקה של A.

הוכחה: $\boxed{A_1}$ רפלקסיביות של $\sim$, $\forall a\in A: a\sim a \Rightarrow \forall a\in A,\ a\in[a]_\sim\in P$ כנדרש.

$\boxed{A_2}$ נניח $x\in[a]_\sim \wedge x\in[b]_\sim$ צ"ל: $[a]_\sim=[b]_\sim$.

$x\in[a]_\sim \wedge x\in[b]_\sim \Leftarrow x\sim a \wedge x\sim b \overset{\text{סימטריה}}{\Leftarrow} a\sim x \wedge x\sim b \overset{\text{טרנזיטיביות}}{\Leftarrow} a\sim b \overset{\text{משפט}}{\Rightarrow} [a]_\sim=[b]_\sim$ ■

חלק ב' של המשפט: תהיה P חלוקה של A, אזי

היחס $\sim = \{\langle a,b\rangle \in A^2 \mid \exists M\in P. a,b\in M\}$ הוא יחס שקילות.

קבוצת מחלקות השקילות שלו היא P.

יהא $\sim$ יחס שקילות ב-A. את החלוקה $\{[a]_\sim \mid a\in A\}$

מסמנים $A/\sim$ והיא נקראת קבוצת המנה A חלקי $\sim$.

המעבר מ-A ל-$A/\sim$ הוא הכללה, שבה $\sim$ הופך להיות שוויון.

פונקציית שקילות: $\{\langle A,B\rangle \in (P(T))^2 \mid$ קיימת פונקציית שקילות (חח"ע ועל) מ-A על B $\}$ T קבוצה כלשהי המכילה את A ו-B.

נראה כי זהו יחס שקילות:

* רפלקסיביות: לכל A קיימת I_A ההפיכה מ-A על עצמה.
* סימטריות: אם קיימת $f:A\to B$ שקילות אזי $f^{-1}:B\to A$ שקילות
* טרנזיטיביות: תהיינה $f:A\to B$, $g:B\to C$ פ' שקילות, אזי $g\circ f:A\to C$ גם היא שקילות.

כאשר מתקיים יחס זה נאמר ש: $|A|=|B|$ כלומר A ו-B שוות עוצמה.