תרגול

מבנה ~~[illegible]~~ 4 ~~[illegible]~~

פתרון נוסחאות רקורסיה

הצבה

איטרציה

שיטת המאסטר

דוגמא למשוואה: $T(1)=1$ $\quad T(n)=2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n$

נרצה להוכיח: $T(n)\le c\cdot n\log n$ עבור c מסוים

נניח נכונות עבור $\frac{n}{2}$:

$$T\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)\le c\cdot\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\log\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$$

נציב:

$$T(n)\le 2\left(c\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\log\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n\le$$

$$\le c\cdot n\cdot\log\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor)+n\le c\cdot n\cdot\log n-c\cdot n\cdot\cancel{\log 2}^{1}+n\le$$

$$\le c\,n\log(n)-c\,n+n\le c\cdot n\log n \quad \forall c\ge 1$$

צריך להוכיח מקרי קצה

עבור $n=2$

$$T(2)=2T(1)+2=4\le c\cdot 2\cdot\log 2$$

אותו דבר $n=3$ צריך להוכיח בנפרד

$$T(3)=2T(1)+3=5\le c\cdot 3\cdot\log(3)$$

שיטת ההצבה:

מנחשים פתרון

מוכיחים באינדוקציה

מוצאים הקבועים שבשבילם מתקיים השוויון

Brute Force תרגול 6

$T(1) = \Theta(1)$ בתנאי:

$$T(n) = 3\,T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n$$

$$T_n = n + 3\cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) = n + 3\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3\,T\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right)\right) =$$

$$= n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 9\,\frac{n}{16} + 27\,T\left(\left\lfloor \frac{n}{64} \right\rfloor\right) \dots$$

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + \frac{9}{16}n + \frac{27}{64}n + \dots + 3^{\log_4 (n)}\,\Theta(1) \leq$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) \leq$$

$$\leq n \cdot 4 + \Theta(n) = O(n)$$

$n^{\log_4 3} < n^1 \Leftarrow \log_4 3 < 1$

שיטת המאסטר

בהרבה אלגוריתמים יש נוסחה חוזרת:

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

כשנתונים a, b קבועים,

הפתרון תלוי בגודל של $f(n)$

1) אם $f(n)$ "קטן"

$$f(n) = O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right)$$

$\epsilon > 0$, קבוע כלשהו

$$\Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

אם $f(n)$ "בינוני"

$$f = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$$

אם $f(n)$ "גדולה"

$$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$$

$$a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$$ וגם מתקיים

עבור $c < 1$ כלשהו.

$$T(n) = \Theta\left(f(n)\right)$$ אז

דוגמאות

(1

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$\log_b a = \log_3 9 = 2$$

$$f(n) = O(n) = O\left(n^{2-1}\right) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 9}\right) = \Theta(n^2)$$

(2

$$T(n) = T\left(\frac{2}{3}n\right) + 1$$

$$\log_b a = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$$

$$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(1)$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right) = \Theta(\log n)$$

(3

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$$

$$\log_b a = \log_4 3 < 0.8 \qquad f(n) = \Omega(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$$

$$a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n\log n \leq c \cdot f(n) \qquad c = \frac{3}{4} < 1$$

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$$ מקרה 3

מבני נתונים תרגול 4 המשך

רקורסיה:

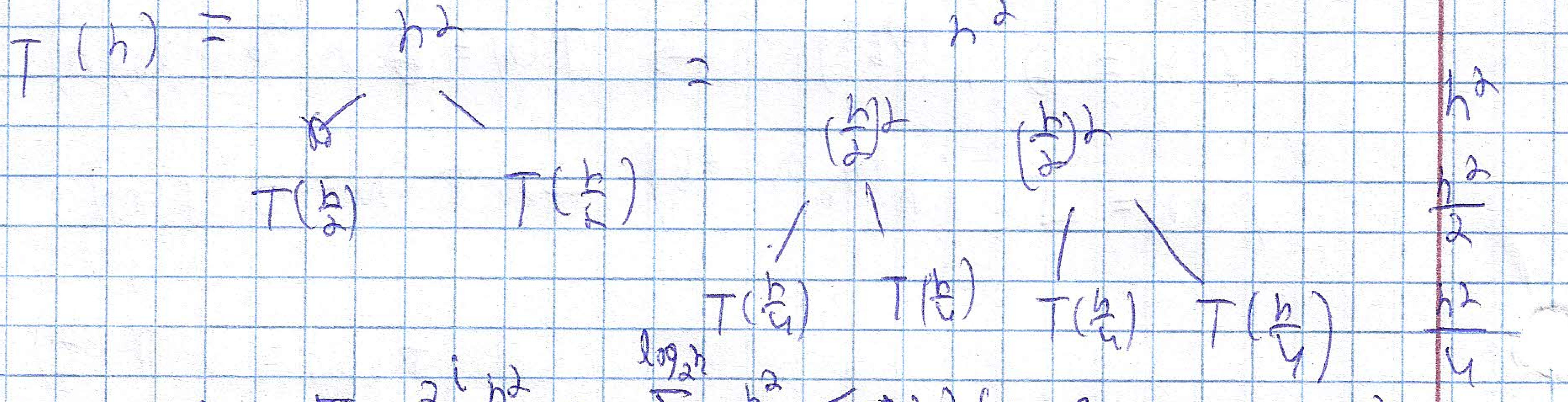
$$T(n) = a\,T(g(n)) + h(n)$$

נרצה $f(n)$ שעבורו

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$T(n) =$$



$$T(n) = \sum \frac{2^i n^2}{2^{2i}} = \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n^2}{2^i} \le n^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \le 2n^2$$

$$= \Theta(n^2)$$

$$T(n) = 9\,T\left(\frac{n}{7}\right) + n$$

$$= 9\cdot\left(9\cdot T\left(\frac{n}{49}\right) + \frac{n}{7}\right) + n =$$

$$= 81\,T\left(\frac{n}{49}\right) + \frac{9}{7}n + n =$$

$$= 9^3\,T\left(\frac{n}{7^3}\right) + \frac{81}{7^2}n + \frac{9^2}{7^2}n + \frac{9}{7}n + n$$

$$= 9^k\,T\left(\frac{n}{7^k}\right) + n\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{9}{7}\right)^i\right)$$

$$k = \lceil \log_7 n \rceil$$

[illegible]

$$T(n) = 9^{\log_7(n)+1}\,\underbrace{T\left(\frac{n}{7^{\log n+1}}\right)}_{\text{[illegible]}} + n\left(\sum_{i=1}^{\log_7 n}\left(\frac{9}{7}\right)^i\right) =$$

$$= 9^{\log_7 n} + n\,\frac{\left(\frac{9}{7}\right)^{\log_7 n} - 1}{\frac{2}{7}} = 9^{\log_7 n} + \frac{n}{7^{\log_7 n}}\cdot 9^{\log_7 n} =$$

$$= 7^{(\log_9 7)(\log_7 n)} + \frac{n}{n}\cdot 7^{\log_9 7\cdot\log_7 n} = \Theta\left(n^{\log_7 9}\right)$$

Master Theorem שיטת המאסטר

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

משווים $\longrightarrow$ $f(n) \overset{?}{} n^{\log_b a}$

1. $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right) \rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

2. $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \rightarrow T(n) = \Theta\, n^{\log_b a}(\log n)$

3. $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = 9\,T\left(\frac{n}{7}\right) + n$$

האם קיים ε עבורו

$$f(n) = O\left(n^{\log_7 9 - \varepsilon}\right)$$

$$\log_7 9 \sim 1.2 > 1$$

עבור $0.1 = \varepsilon$

$$f(n) = n = O\left(n^{\log_7 9 - \varepsilon}\right) \approx O\left(n^{1.1}\right)$$

לפי מקרה 1. לכן

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_7 9}\right)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 10n \qquad a = b = 2 \quad f(n) = 10n$$

$$10n \overset{?}{=} O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right) = O\left(n^{1-\varepsilon}\right)$$

לא קיים ε כזה

$$10n \overset{?}{=} \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \quad \checkmark$$

מקרה 2. לכן

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = \sqrt{n}\; T(\sqrt{n}) + n \qquad \text{לא מאסטר!}$$

$$T(n) = \sqrt{n}\left(\sqrt{\sqrt{n}}\; T\left(\sqrt{\sqrt{n}}\right) + \sqrt{n}\right) + n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{n}} \ldots\right)$$

[illegible]

נסמן של n ספציפי: שמקיים:

$$\boxed{n = 2^{2^m}}$$

$$T(n) = T(2^{2^m}) = \sqrt{2^{2^m}}\, T\left(\sqrt{2^{2^m}}\right) + 2^{2^m}$$ ב.5

$$\sqrt{2^{2^m}} = 2^{2^{m-1}}$$

$$= 2^{2^{m-1}} T\left(2^{2^{m-1}}\right) + 2^{2^m} = \underbrace{2^{2^{m-1}}\left(2^{2^{m-1}}\right.}_{2^{2^m}} + 2^{2^{m-2}} \cdot T\left(2^{2^{m-2}}\right)\Big) + 2^{2^m} =$$

$$= m\, 2^{2^m} = n \log\log n$$

[illegible]

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log^2 n$$

לא [illegible] master theorem

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log^2 n = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\log^2\frac{n}{2}\right) + n\log^2 n =$$

$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n\left(\log^2 n + \log^2\frac{n}{2}\right) = \ldots =$$

$$= n\left(\log^2 n + \log^2\frac{n}{2} + \log^2\frac{n}{4} \ldots\right)$$

$$\frac{n}{2^{\frac{\log n}{2}}} = n\sqrt{\frac{1}{2^{\log n}}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

[illegible] חלק הראשון של הסכום [illegible] נחסום את כל האיברים [illegible] [illegible]

$$n\log^2\left(\frac{n}{2^{\frac{\log n}{2}}}\right)$$ [illegible]

$$T(n) \geq \frac{\log n}{2} \cdot n\log^2\left(\frac{n}{2^{\frac{\log n}{2}}}\right) = \frac{\log n}{2} \cdot n\log^2\sqrt{n} =$$

$$= \frac{\log n}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\log n\right)^2 = \frac{1}{8} n\log^3 n = \Omega(n\log^3 n)$$

$$T(n) \leq \overbrace{n\log^2 n + n\log^2 n + \ldots + n\log^2 n}^{\log n \text{ פעמים}} = \log n\,(n\log^2 n) =$$

$$= n\log^3 n = O(n)$$

$$T(n) = \Theta(n\log^3 n)$$