סיבוכיות

ארזים ©

25 באפריל 2017

1 סיבוכיות זיכרון

הגדרה 1.1 יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. הקוטר של G, שנסמנו $\operatorname{diam}(G)$, מוגדר באופן הבא:

$$\operatorname{diam}(G)=\max_{u,v\in V}\operatorname{dist}(u,v)$$

דוגמא במעגל בגודל 6, הקוטר הוא 3.

תרגיל תהי

$$A=\{(G,D)\mid\operatorname{diam}(G)\leq D\}$$

הוכיחו כי

$$A\in\mathrm{DSPACE}(\log n\log D)$$

כאשר $n=|V|$.

הוכחה: מספיק לבדוק לכל זוג קודקודים u,v האם אפשר להגיע מהקודקוד v לקודקוד u במסלול באורך לכל היותר D (אפשר למשל לעבור על כל זוגות הקדקודים לפי סדר לקסיקוגרפי ולדחות אם יש זוג שמפר את התכונה. בצורה זו אין צורך לזכור את רשימת הזוגות שכבר בדקנו ואת תוצאות הבדיקות הקודמות). נגדיר פרדיקט:

$$\operatorname{Reach}(u,v,k)=\begin{cases}1 & d(u,v)\leq k\\ 0 & d(u,v)>k\end{cases}$$

כעת, ברור כי

$$\operatorname{Reach}(u,v,k)=\bigvee_{w\in V}\left(\operatorname{Reach}\left(u,w,\frac{k}{2}\right)\wedge\operatorname{Reach}\left(w,v,\frac{k}{2}\right)\right)$$

כאשר אם $k=1$ אזי $(u,v)\in E\iff\operatorname{Reach}(u,v,1)=1$. בעזרת זה נחשב ברקורסיה ־ בכל שלב יש צורך לזכור רק את סדרת אותם w_i שבחרנו ברקורסיה. לכן הזיכרון הוא $O(\log n\log D)$, והנכונות נובעת מנכונות הנוסחה. זמן הריצה הוא $\exp(O(\log n\log D))$.

■

1.1 איזון נוסחאות

משפט 1.2 תהי $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ פונקציה. אם קיימת עבור f נוסחה בגודל s, אז יש לה נוסחה בעומק $\log s$ ובגודל $\mathrm{poly}(s)$.

הוכחה: מעתה (ועד סוף התרגיל) נמדוד גודל לפי מספר עליו. לשם ההוכחה, נראה ראשית למה:

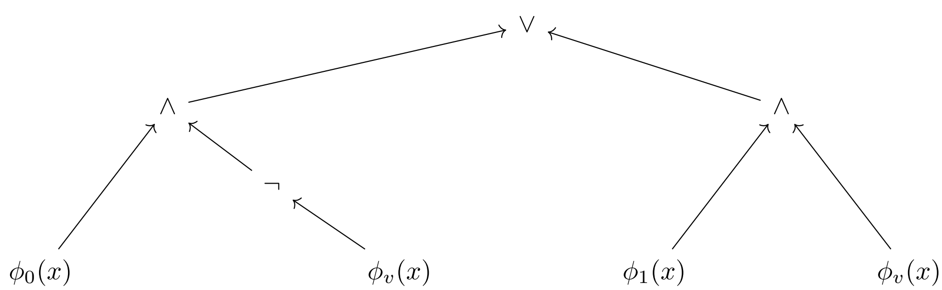
למה 1.3 יהי T עץ בינארי בגודל s. אזי יש קודקוד v בתוך T כך שבתת העץ ששורשו v יש בין $\frac{s}{3}$ ובין $\frac{2s}{3}$ עלים.

הוכחה: נטייל בעץ החל מהשורש, כשבכל שלב נרד לבן שתת העץ שלו מכיל יותר עלים (יותר גדול). נעצור בקודקוד הראשון v שעבורו תת העץ שלו בגודל לכל היותר $\frac{2s}{3}$. יש להראות כי הגודל הזה הוא לפחות $\frac{s}{3}$. יהי u האב של v. לא עצרנו בקודקוד u, ולכן גודל תת העץ שלו הוא יותר מאשר $\frac{2s}{3}$, ולקחנו את v להיות הבן הכבד של u, כלומר גודל תת העץ שלו הוא לפחות מחצית מגודל תת העץ של u - כלומר לפחות $\frac{s}{3}$. ■

כעת, תהי ϕ הנוסחה בגודל s של f. יהי v הקודקוד שמובטח מהלמה. תהי ϕ_v תת הנוסחה ששורשה v. תהיינה ϕ_0,ϕ_1 הנוסחאות שמתקבלות על ידי הסרת ϕ_v מתוך ϕ והצבת הקבוע 1,0 בהתאמה במקום הקודקוד v. נשים לב כי הגודל של הנוסחאות ϕ_v,ϕ_0,ϕ_1 הוא לכל היותר $\frac{2s}{3}$. בנוסף,

$$\phi(x)=\left(\phi_0(x)\wedge\neg\phi_v(x)\right)\vee\left(\phi_1(x)\wedge\phi_v(x)\right)$$

נכונות הנוסחה ברור מחלוקה למקרים לפי $\phi_v(x)$. אז נוכל לחשב את ϕ באופן הבא:



נמשיך באינדוקציה. נגדיר

$$d(s)=\max_{|\psi|=s}\min_{\varphi\equiv\psi}\mathrm{depth}(\varphi)$$

מהבנייה נקבל

$$d(s)\leq 3+d\left(\frac{2s}{3}\right)$$

לכן נקבל

$$d(s) = O(\log s)$$

כלומר לכל נוסחה בגודל s יש נוסחה שקולה בעומק $O(\log s)$. החסם על הגודל נובע מכך שמספר העלים בעץ בינארי בעומק k הוא 2^k. ■