סיבוכיות

ארזים ©

28 במרץ 2017

1 אי כריעות בעיית העצירה

משפט 1.1 השפה

$$Halt = \{(M,x) \mid \text{M is a TM which halts on x}\}$$

אינה כריעה.

הוכחה: נניח בשלילה שיש מכונה H שמכריעה את הבעיה. נשתמש בה כדי לבנות מכונה Q שלה התכונות הבאות: Q תמיד תעצור, ואם נמנה את מכונות הטיורינג שעוצרות $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, לכל i קיים x_i שמקיים $Q(x_i) \neq M_i(x_i)$. זו סתירה (x_i יהיה הקידוד של M_i).

Q פועלת באופן הבא: על קלט x, נריץ את H על (x,x). אם H דוחה, Q מקבלת. אם H מקבלת, נריץ את M על x ונענה הפוך.

התכונה הראשונה מתקיימת בבירור, כי H תמיד עוצרת, ואם H קיבלנו אז M עוצרת על x, לכן גם הסימולציה שלה.

נוכיח את התכונה השנייה. לכל i, נבדוק מה עושה Q על $\langle M_i\rangle$. $x_i = \langle M_i\rangle$. M_i תמיד עוצרת, ולכן $H(M_i, M_i)$ מקבלת. לכן Q מריצה את M_i על $\langle M_i\rangle$ ועונה ההיפך, כלומר $Q(\langle M_i\rangle) \neq M_i(\langle M_i\rangle)$. ■

2 הסתברות

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. משתנה מקרי הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$. התוחלת של X היא

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega) X(\omega)$$

התוחלת היא לינארית, ואם המשתנים בלתי תלויים, היא גם כפלית.

משפט 2.1 (אי שוויון מרקוב) יהי X משתנה מקרי אי שלילי, $c>0$. אזי

$$\mathbb{P}(X\geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$$

הוכחה: נגדיר משתנה מקרי $Z = \mathbb{1}_{\{X \geq c\}}$. נשים לב כי $X \geq cZ$ (בודקים על ידי חלוקה למקרים. ניקח תוחלת משני הצדדים:

$$\mathbb{E}\left[X\right] \geq \mathbb{E}\left[cZ\right] = c\mathbb{E}\left[Z\right] = c\mathbb{P}\left(Z = 1\right) = c\mathbb{P}\left(X \geq c\right)$$

ולכן נסיים. ■

דוגמה נניח כי $x_1, \ldots, x_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שמוגדרים באופן הבא: לכל i, $X_i = 1$ בהסתברות p, או 0 בהסתברות $1-p$, באופן בלתי תלוי בשאר. אזי

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 2pn\right) \leq \frac{1}{2}$$

שכן $\mathbb{E}\left[\sum x_i\right] = pn$.

הגדרה 2.2 יהי X משתנה מקרי. השונות של X היא

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right]$$

משפט 2.3 (אי שוויון צ'בישב)

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq c\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^2}$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq c\right) = \mathbb{P}\left(\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 \geq c^2\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^2}$$

■

נחזור לדוגמא הקודמת. בגלל האי תלות נקבל

$$\mathrm{Var}\left(\sum X_i\right) = \sum \mathrm{Var}\left(X_i\right) = np\left(1-p\right) \leq pn$$

שכן $\mathrm{Var}\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - p\right)^2\right] = p\left(1-p\right)^2 + p^2\left(1-p\right) = p\left(1-p\right)$. לכן

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum X_i - pn\right| \geq c\sqrt{pn}\right) \leq \frac{pn}{c^2 pn} = \frac{1}{c^2}$$

כלומר, נקבל חסמים טובים גם כאשר הסטייה בסדר גודל של $\sqrt{pn}$, אבל בפרט, כדי להשוות לחסם הקודם, אפשר לבחור $c \approx \sqrt{pn}$, ואז ההסתברות שמרחק של הסכום מהתוחלת pn הוא לפחות pn היא בסדר גודל של $\frac{1}{n}$.