סיבוכיות

ⓒ ארזים

18 ביוני 2017

1 בעיות פער

ראינו את המשפט הבא בהרצאה, בלי הוכחה:

משפט 1.1 (PCP) לכל $\varepsilon > 0$ הבעיה $\mathrm{Gap}-3\mathrm{SAT}\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]$ היא NP־שלמה.

ניזכר בבעיית 3LIN, בה אנחנו מטפלים במערכת שמוואות לינאריות מעל $\mathbb{F}_2$ עם שלושה משתנים לכל היותר בכל אחת.

מסקנה 1.2 (משפט הוסטאד) לכל $\varepsilon > 0$ הבעיה $\mathrm{Gap}-3\mathrm{LIN}\left[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon\right]$ היא NP־שלמה.

תרגיל הראו רדוקציה משמרת פער בין $\mathrm{Gap}-3\mathrm{LIN}\left[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon\right]$ לבין $\mathrm{Gap}-\mathrm{IS}\left[\frac{1}{8}+\frac{\varepsilon}{4},\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{4}\right]$.

הוכחה: בהינתן מערכת משוואות $e_1,\ldots,e_n$ מעל $\mathbb{F}_2$ במשתנים $x_1,\ldots,x_n$, נבנה גרף G באופן הבא: לכל משוואה e נגדיר "ענן" של ארבעה קודקודים ־ כל קודקוד מתאים להשמה מספקת עבור 3 המשתנים במשוואה. נוסיף צלע בין כל זוג קודקודים שההשמות המתאימות להם אינן עקביות (סותרות זו את זו) ־ כלומר נשים צלע בין e_1,a לבין e_2,b אם קיים משתנה x שמופיע בשתי המשוואות e_1,e_2 שההשמות a,b לא מסכימות עליו.

שלמות נניח שיש השמה $a:\{x_1,\ldots,x_n\}\to\{0.1\}$ שמספקת לפחות $(1-\varepsilon)$ מהמשוואות. נגדיר את I להיות אוסף הזוגות (e,b) ככה שההשמה a מספקת את e, וההשמה b מסכימה עם a על משתני e. נוכיח שזו קבוצה בלתי תלוייה ־ בכל ענן בחרנו לכל היותר קודקוד אחד. אם $(e_1,b_1),(e_2,b_2)$ מחוברות בצלע, קיים משתנה שעליו הן לא מסכימות מתוך e_1,e_2, ולכן לא ייתכן ששתיהן מסכימות עם a. לכן הקבוצה בלתי תלוייה. כמו כן, a מספקת $(1-\varepsilon)m$ משוואות, ולכן $|I|\geq(1-\varepsilon)m$. יש $4m$ קודקודים, ולכן היחס הוא אכן $\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{4}$.

נאותות נניח שכל השמה מספקת לכל היותר $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)m$ משוואות. תהי I קבוצה בלתי תלוייה. כל משתנה x מקבל ערך אחד בלבד בכל הקודקודים $(e,b)\in I$, ולכן I מגדירה השמה (אולי חלקית) a. מצד שני, הגודל של I הוא לכל היותר כמות אותם e_i שאותם a מספקת, כלומר לכל היותר $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)m$. לכן הגודל היחס של I הוא לכל היותר $\frac{1}{8}+\frac{\varepsilon}{4}$.

■

כעת נדון בבעיית $\mathrm{Max}-2\mathrm{SAT}$ ונראה רדוקציה $\mathrm{Gap}-\mathrm{E3SAT}\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]\leq\mathrm{Gap}-2\mathrm{SAT}\left[c_1,c_2\right]$, כאשר נקבע את c_1,c_2 בהמשך. בהינתן פסוקית φ עם n משתנים ועם m פסוקיות, לכל פסוקית $c=\alpha\vee\beta\vee\gamma$ נגדיר 10 פסוקיות $2\mathrm{CNF}$:

$$\alpha,\beta,\gamma,w_c,\left(\overline{\alpha}\vee\overline{\beta}\right),\left(\overline{\beta}\vee\overline{\gamma}\right),\left(\overline{\alpha}\vee\overline{\gamma}\right),\left(\alpha\vee\overline{w_c}\right),\left(\beta\vee\overline{w_c}\right),\left(\gamma\vee\overline{w_c}\right)$$

פלט הרדוקציה $f\left(\varphi\right)$ יהיה "וגם" של כל אלה.

שלמות נניח כי φ ספיקה, ותהי a השמה מספקת. נגדיר השמה b של $f\left(\varphi\right)$. נטעין כי ניתן לספק 7 מתוך 10 הפסוקיות שמתאימות לכל פסוקית. b תוגדר באופן הבא: b מסכימה עם a על כל המשתנים המקוריים. לכל פסוקית c, אם a מספקת את שלושת המשתנים של c אז $b\left(w_c\right)=1$, ואחרת $b\left(w_c\right)=0$. יש שלושה מקרים - אם a מספקת את שלושת המשתים, רק שניים או רק אחד. בודקים ורואים שבכל מצב b מספקת 7 מתוך 10 הפסוקיות.

נאותות תהי b השמה למשתני $f\left(\varphi\right)$. נגדיר את a להיות הצמצום של b למשתנים המקוריים. נטען שמתוך 10 הפסוקיות, תמיד אפשר לספק לכל היותר 7. יתר על כן, אם $c=\alpha\vee\beta\vee\gamma$ לא מסתפק, לכל ערך של w_2 מסתפקות לכל היותר 6 פסוקיות. אם $b\left(w_c\right)=0$ זה ברור. אם $b\left(w_c\right)=1$, אפשר לספק רק 4 משוואות. כעת, a מספקת לכל היותר $\frac{7}{8}+\varepsilon$ מהפסוקיות, ולכן b מספקת לכל היותר

$$\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)\frac{7}{10}+\left(\frac{1}{8}-\varepsilon\right)\frac{6}{10}=\frac{55}{80}+\frac{\varepsilon}{10}$$

קיבלנו את הקבועים

$$c_1=\frac{55}{80}+\frac{\varepsilon}{10},c_2=\frac{56}{80}$$

פער ממש קטן.

משפט 1.3 לכל $c>0$ אין אלגוריתם c-קירוב לבעיית הקבוצה הבלתי תלוייה.

תרגיל

$$\mathrm{Gap}-\mathrm{IS}\left[\alpha,\beta\right]\leq_p\mathrm{Gap}-\mathrm{IS}\left[\alpha^2,\beta^2\right]$$

ושימו לב שזה גורר את המשפט.

פתרון בהינתן גרף $G=\left(V,E\right)$ עם $|V|=n$, נגדיר $G^2=\left(V^2,E'\right)$, כאשר

$$E'=\left\{\left(\left(u_1,u_2\right),\left(v_1,v_2\right)\right)\mid\exists i,j\in\left\{1,2\right\}\quad\left(u_i,v_j\right)\in E\right\}$$

שלמות נניח כי U קבוצה בלתי תלוייה בתוך G בגודל לפחות βn. אכן, $U\times U$ בלתי תלוייה בגרף G^2 וכן

$$|U\times U|=|U|^2\geq\beta^2n^2$$

כנדרש.

נאותות תהי $I \subseteq V \times V$ בלתי תלוייה. נניח כי $|I| \geq \alpha^2 n^2$, ונראה שנוכל לבנות קבוצה בלתי תלוייה בתוך G בגודל לפחות αn(וזה יוכיח את מה שרצינו). נגדיר

$$U_1 = \{v \in V \mid \exists u \in V \quad (v,u) \in I\}$$
$$U_2 = \{u \in V \mid \exists v \in V \quad (v,u) \in I\}$$

כמובן, $I \subseteq U_1 \times U_2$, ולכן $|U_2| |U_1| \leq \alpha^2 n^2$ת ובפרט יש $i \in \{1,2\}$ עם $|U_i| \geq \alpha n$. נניח בלי הגבלת הכלליות שזו U_1 ונגדיר $I' = U_1$. נראה שזו בלתי תלוייה - נניח שיש $u, v \in I'$ שיש ביניהם צלע. קיימים u', v' עם $(u,u'), (v,v') \in I$ (מההגדרה). זו סתירה לאי תלות של I מהגדרת G^2.

כעת, נדבר על בעיית כיסוי בקודקודים $(\mathrm{Vertex-Cover})$. כיסוי בקודקודים של $G = (V,E)$ זו קבוצה בתוך C כך שלכל צלע בתוך G יש קצה בתוך C.

טענה 1.4 U בלתי תלוייה אם ורק אם $V \backslash U$ כיסוי בקודקודים.

הוכחה: נניח כי U בלתי תלוייה. לכל צלע (u,v), לא ייתכן ששניהם בתוך U כי היא בלתי תלוייה. לכן המשלים מכסה את כל הקשתות.

בכיוון השני, נניח כי $V \backslash U$ כיסוי בקודקודים, ונניח כי $e = (v,u)$ צלע. אחד הקודקודים בוודאות במשלים, ולכן U אכן בלתי תלוייה. ∎

מסקנה 1.5 לכל גרף G, גודל הכיסוי המינימלי הוא n פחות גודל הקבוצה הבלתי תלוייה המקסימלית.

מסקנה 1.6 $\mathrm{Gap-IS}[\alpha,\beta] \leq \mathrm{Gap-VC}[1-\alpha, 1-\beta]$.

מסקנה 1.7 קיים קבוע $\rho > 1$ כך שאין קירוב ρ עבור VC.

אז למה את VC אפשר לקרב בפקטור 2, ואת IS אי אפשר לקרב באף פקטור קבוע? כזכור, אם A בעיית מקסימיזציה, קושי של $\mathrm{Gap-A}[\alpha,\beta]$ גורר קושי של קירוב לכדי $\frac{\alpha}{\beta}$. בפרט, עבור IC, ראינו שזה גורר קושי של קירוב לכדי $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, שהוא קטן אפילו יותר. במקרה של VC, לפני הרדוקציה היה לנו קושי של $\frac{1-\alpha}{1-\beta}$, וקיבלנו קושי של $\frac{1-\alpha}{1-\beta} < \frac{1-\alpha}{1-\beta}\frac{1+\alpha}{1+\beta}$, כלומר המצב שלנו רק התדרדר. לאיזה קבוע ρ אפשר להראות שקשה לקרב VC? יודעים שהחסם העליון הוא 2, ויודעים קבוע טוב יותר מאשר $\frac{7}{6} - \varepsilon$, אבל לא יודעים טוב יותר.