<u>סיבוכיות</u>

ⓒ ארזים

6 ביוני 2017

1 אלגוריתמים אקראיים וקירובים

הגדרה 1.1 יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. חתך הוא חלוקה של V לשתי קבוצות זרות A,B. גודל החתך הוא מספר הצלעות שחוצות אותו (כלומר עוברות מהקבוצה A אל הקבוצה B).

נשתמש בהגדרה הזו כדי להגדיר שתי בעיות - $\mathrm{Min-Cut}$, מציאת חתך מינימלי, שידוע שהיא בתוך P, ואנחנו נראה לה אלגוריתם אקראי ופשוט, וגם $\mathrm{Max-Cut}$, מציאת חתך מקסימלי, שהיא NP-קשה, ואנחנו נראה לה אלגוריתם קירוב אקראי. נתחיל עם הראשונה.

הגדרה 1.2 יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהי $e=(u,v)$ צלע. הגרף המכווץ $G/e=\{V',E'\}$ הוא

$$V'=(V\setminus\{u,v\})\cup\{uv\}$$
$$E'=\{(w,z)\mid(w,z)\in E\wedge w,z\neq u,v\}\cup\{(w,uv)\mid(w,v)\in E\vee(w,u)\in E\}$$

יכולות להיות כאן צלעות מקבילות.

אלגוריתם עבור $\mathrm{Min-Cut}$. הקלט הוא $G=(V,E)$, ונניח שהוא קשיר (אחרת ברור שאפשר בקלות למצוא חתך בגודל 0). כל עוד $|V|>2$, נבחר אקראית צלע $e\in E$ (באופן אחיד) ונכווץ - $G=G/e$. כאשר $|V|=2$, נחזיר את החתך שהתקבל.

טענה 1.3 יהי $A\sqcup B$ חתך מינימלי של G. אז האלגוריתם מחזיר אותו בהסתברות $\frac{2}{n(n-1)}$.

הוכחה: נסמן $k=|E(A,B)|$ הגודל של החתך. מה ההסתברות שבשלב הראשון נבחר צלע מתוך $E(A,B)$? נשים לב שהדרגה של כל קודקוד בגרף היא לפחות K, ולכן $|E|\geq\frac{kn}{2}$. לכן ההסתברות שהבחירה הראשונה פגעה בקשת מתוך $E(A,B)$ היא לכל היותר $\frac{k}{\frac{kn}{2}}=\frac{2}{n}$. לכן בהסתברות $1-\frac{2}{n}=\frac{n-2}{n}$ החתך A,B שרד את השלב הראשון. באופן דומה, ההסתברות שהוא שרד את השלב מספר i היא לפחות $1-\frac{2}{n-i}=\frac{n-i-2}{n-i}$. לכן, מה ההסתברות שהחתך כולו שרד את כל השלבים? לפחות

$$\prod_{i=0}^{n-3}\frac{n-i-2}{n-i}=\frac{(n-2)!}{\frac{n!}{2}}=\frac{2}{n(n-1)}$$

■

נריץ את האלגוריתם שלנו הרבה (למשל n^3), ונחזיר את המינימום שהתקבל. באופן דומה אפשר למצוא את כל החתכים המינימליים. נעבור לדבר על $\mathrm{Max-Cut}$.

אלגוריתם נרצה למצוא אלגוריתם יעיל שמוצא חתך $A\sqcup B$ כך שמתקיים $|E(A,B)|\geq\alpha\cdot K$ כאשר K גודל החתך המקסימלי, עבור $0<\alpha<1$. ככל שאותו α גדול יותר אנחנו שמחים יותר. זה נקרא α קירוב.

טענה 1.4 יהי $G=(V,E)$ גרף עם m צלעות. אז קיים בו חתך בגודל $\frac{m}{2}$ לפחות.

הוכחה: נבחר חתך באקראי - נכניס כל קודקוד אל A בהסתברות $\frac{1}{2}$. נחשב את תוחלת $|E(A,B)|$. לכל צלע e נגדיר משתנה מקרי

$$X_e=\mathbb{1}_{\{e\in E(A,B)\}}$$

כעת

$$|E(A,B)|=\sum_e X_e$$
$$\mathbb{E}|E(A,B)|=\sum_e\mathbb{E}(X_e)=\sum_e\mathbb{P}(e\in E(A,B))=\sum_e\frac{1}{2}=\frac{m}{2}$$

ועל כן נקבל שקיים חתך בגודל לפחות $\frac{m}{2}$. ■

מצד שני, גודל כל חתך הוא לכל היותר m. לכן מה שנעשה הוא לבחור חתך A,B באקראי ולהחזיר אותו. תוחלת גודלו תהיה $\frac{m}{2}$, כלומר נתנו אלגוריתם $\frac{1}{2}$-קירוב - עם כמה בעיות. ראשית, האלגוריתם הוא אקראי ולא דטרמיניסטי (את זה אפשר לפתור). כמו כן, אנחנו יודעים שהאלגוריתם עובד בתוחלת, אבל אנחנו רצינו אלגוריתם שמחזיר קירוב בהסתברות גבוהה (הפתרון של הבעיה הזו יהיה בתרגיל בית). בנוסף, מה אם אפשר יותר טוב? אז זהו, שכן. יש אלגוריתם עם $\alpha=0.87\ldots$.