סיבוכיות

ⓒ ארזים

13 ביוני 2017

1 אלגוריתמי קירוב ובעיות פער

נחזור על האלגוריתם החמדן עבור $\mathrm{Vertex}-\mathrm{Cover}$ ועל הדוגמה הנגדית שלו. האלגוריתם לוקח בכל שלב את הקודקוד בעל הדרגה המקסימלית שנותר בגרף, ומסיר אותו עם כל קשתותיו. בשביל הדוגמה הנגדית, נבנה גרף עם m רמות, ככה שברמה i יש $\left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$ קודקודים, וכל קודקוד ברמה $i \geq 2$ מחובר בקשת אל i קודקודים מהרמה הראשונה. אף קודקוד ברמה הראשונה לא מחובר ליותר מקודקוד אחד ברמה i. נשים לב שלקודקוד ברמה $i \geq 2$ יש i שכנים, וברמה 1 יש לכל היותר $m-1$ שכנים. הכיסוי שנוציא יהיה כל הגרף, שבו בערך $m \log m - m$ קודקודים.

1.1 אופטימיזציה

בהינתן יחס $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$, הגדרנו $Y_x = \{y \mid (x,y) \in R\}$, והנחנו שיש פונקציית ערך $\mathrm{Val}_x : Y_x \to \mathbb{R}_+$. בבעיית מקסימיזציה $\mathrm{Opt}(x) = \max \mathrm{Val}_x(y)$, ובבעיית מינימיזציה מגדדירים עם מינימום.

הגדרה 1.1 אמרנו שאלגוריתם A נותן c־קירוב לבעיית מקסימום R אם לכל קלט x מתקיים

$$\frac{1}{c}\mathrm{opt}(x) \leq \mathrm{Val}_x(A(x)) \leq \mathrm{opt}(x)$$

הגדרה 1.2 בעיית הפער $\mathrm{Gap}-R[\alpha,\beta]$ (כאשר R בעיית מקסימום) מנסה להכריע, בהינתן קלט x, מה מהבאים נכון:

1. קיים y עם $\mathrm{Val}_x(y) \geq \beta$.
2. לכל y מתקיים $\mathrm{Val}_x(y) \leq \alpha$.

התנאים זרים אבל לא משלימים. אם x כזה שאף תנאי לא מתקיים, אפשר לענות כל דבר.

הגדרה 1.3 רדוקציה משמרת פער בין הבעיות $\mathrm{Gap}-R[\alpha_1,\beta_1], \mathrm{Gap}-R[\alpha_2,\beta_2]$ היא פונקציה $f:\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ שמקיימת

$$\mathrm{opt}(x) \geq \beta_1 \Rightarrow \mathrm{opt}(f(x)) \geq \beta_2$$
$$\mathrm{opt}(x) \leq \alpha_1 \Rightarrow \mathrm{opt}(f(x)) \leq \alpha_2$$

נסמן $\leq_L$, $\leq_p$ כמו בעבר אם הרדוקציות הן בזיכרון לוגריתמי/זמן פולינומי.

בעיה $\text{Gap}-3\text{SAT}[\alpha,\beta]$ - בהינתן נוסחת 3CNF, האם יש השמה שמספקת לפחות β מהפסוקיות, או שכל השמה מספקת לכל היותר אחוז α מהפסוקיות.

משפט 1.4 (משפט PCP - Probabilistically Checkable Proof) לכל $\varepsilon>0$ הבעייה $\text{Gap}-3\text{SAT}\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]$ היא NP־קשה (בפרט שלמה).

מסקנה 1.5 אם $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$ אז אין אלגוריתם קירוב יעיל עבור $\text{Gap}-3\text{SAT}$ עם יחס קירוב $\frac{8}{7}$.

הערה 1.6 תמיד ניתן לספק $\frac{7}{8}$ מהפסוקיות.

בעיה $\text{Gap}-\text{Clique}[\alpha,\beta]$ - האם יש בגרף קליקה עם לפחות β קודקודים או שכל קליקה מכילה לכל היותר α קודקודים.ץ

משפט 1.7 הבעיה $\text{Gap}-\text{Clique}\left[\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ היא NP־קשה (בפרט שלמה).

הוכחה: אותה רדוקציה כמו $3\text{CNF}\to\text{CLIQUE}$. בהנתן נוסחת 3CNF מהצורה $c_1\wedge\cdots\wedge c_m$ שבכל פסוקית בה יש 3 ליטרלים, נגדיר גרף עם $3m$ קודקודים. כל קודקוד יתאים לליטרל אחד בפסוקית אחת, ונחבר בקשת $(c_i,l_1)\leftrightarrow(c_j,l_2)$ אם $c_1\neq c_j$ וגם l_i קונסיסטנטי עם l_2 (הם לא השלילה זה של זה). אם הנוסחא המקורית ספיקה, אז מכל שלישייה נוכל לבחור ליטרל שהסתפק ע ידי ההשמה (יש לפחות אחד) ואלה יהיה קליקה. זו קליקה בגודל לפחות m בגרף בגודל $3m$ (זה כיוון אחד של הרודקציה, $yes\to yes$). עבור הכיוון השני, נניח שבגרף יש קליקה בגודל k. בכל שלישייה יש לכל היותר ליטרל אחד מהקליק. ניקח השמה קונסיסטנית עם הליטרלים שבקליקה (מנחשים על האחרים), ומהגדרת הגרף ההשמה מוגדרת היטב ותספק לפחות k פסוקיות. לכן הראינו את הרדוקציה. ■

כעת נראה מחלקה חדשה של בעיות, שיהיה קל לעשות איתן רדוקציות - Generalized Constraint Satisfaction Graphs. יש לנו גרף $G=(V,E)$, ויש לנו Σ שהיא אלפבית (או אפשרויות לצביעה חוקית). יש לנו גם אילוצים $\phi:E\to P(\Sigma\times\Sigma)$, כלומר לכל $e\in E$ הזוג הקבוצה $\phi(e)$ היא אוסף הצביעות המותרות של קודקודי e. בהינתן (V,E,Σ,ϕ) כזה, השאלה היא האם יש צביעה של הקודקודים באופן שיספק את ϕ, כלומר האם יש $c:V\to\Sigma$ כך שלכל $e=(u,v)$ מתקיים $(c(u),c(v))\in\phi(e)$. מה שמעניין בקבוצה Σ זה הגודל שלה, לכן לפעמים נדבר על kCSG, שבו $|\Sigma|=k$.

דוגמא 3 צביעה - ניקח $|\Sigma|=3$, ולכל e

$$\phi(e)=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(2,1)\}$$

דוגמא Independent Set - ניקח $|\Sigma|=2$ ואז

$$\phi(e)=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$$

לבעיות CSG ניתן להתאים באופן טבעי שני סוגי בעיות אופטימיזציה.

1. נחפש צביעה חלקית, גדולה ככל האפשר, כך שכל האילוצים שקודקודיהם נצבעו יסתפקו. זה נקרא $\max_V-\text{CSG}$.

2. נתעקש על צביעה מלאה ונרצה למקסם את כמות האילוצים שהסתפקו. זה נקרא $\max_E - \mathrm{CSG}$.

דוגמא נחזור לבעיית Independent Set. גרסת $\max_V - \mathrm{CSG}$ טובה תהיה עם $\Sigma = \{1\}$, כאשר מנסים למצוא את הקבוצה הבלתי תלוייה המקסימלית.

כשמדברים על צביעה חלקית נחשוב על הצבעים בתור $\Sigma \cup \{\perp\}$, כאשר $\perp$ הוא מעין Null.

דוגמא $\mathrm{Max} - 3\mathrm{SAT}$ - בהינתן נוסחת 3CNF נגדיר את הגרף הבא: לכל פסוקית נתאים קודקוד, והצבעים יהיו $\Sigma = \{1,2,3\}$. בין כל שני קודקודים תהיה קשת, והאילוץ על הקשת $e = (c_1, c_2)$ ידרוש עקביות (צבע אומר איזה ליטרל מסתפק). אם הנוסחא ספיקה אז יש צביעה מלאה המספקת את כל האילוצים. בפרט, גרסת $\max_V$ של הבעיה מתאימה לבעיה של לספק כמה שיותר פסוקיות.

מסקנה 1.8 הבעיה $\mathrm{Gap}_V - 3\mathrm{CSG}\left[\frac{7}{8}+\varepsilon, 1\right]$ היא NP-קשה.

דוגמא לבעיה מהסוג השני: $\mathrm{Max} - \mathrm{Cut}$. $\Sigma = \{0,1\}$, ולכל קשת e נותנים $\phi(e) = \{(1,0),(0,1)\}$. פתרון לבעיית $\max_E - 2\mathrm{CSG}$ הזו שקול למציאת $\mathrm{Max} - \mathrm{Cut}$, וגם כאן ניתן לדבר עם $\mathrm{Gap}_E - \mathrm{kCSG}[\alpha, \beta]$, כלומר בעיות בהן ניתן לספק על ידי צביעה מלאה לפחות β מהאילוצים, או שכל צביעה מלאה מספקת לכל היותר α מהם.

משפט 1.9

$$\mathrm{Gap}_v - \mathrm{kCSG}[\delta, 1] \leq_L \mathrm{Gap} - \mathrm{IS}\left[\frac{\delta}{k}, \frac{1}{k}\right]$$

הוכחה: קלט לבעיה $\mathrm{Gap}_v - \mathrm{kCSG}$ הוא גרף $G = (V,E)$ ופונקציית אילוץ ϕ. נגדיר גרף חדש:

$$V' = V \times \Sigma, |V'| = k|V|$$

ובו נחבר בקשת $(v,i) \to (u,j)$ אם $v = u$ או $(i,j) \notin \phi((v,u))$ (בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח שהגרף כאן מלא).

נראה שלמות (כן עובר לכן): אם יש צביעה $c : V \to \Sigma$ מלאה המספקת את ϕ אז מכל "ענן" (אוסף עותקים של קודקוד עם כל הצבעים) ניקח את הקודקוד $(v, c(v))$, כי אם $(v, c(v)) \to (u, c(u))$ וגם $v \neq u$ אזי $(c(v), c(u)) \notin \phi((v,u))$ בסתירה לכך שהצביעה מספקת את ϕ. לכן אכן יש IS בגודל $\frac{|V'|}{k} = |V|$.

נראה נאותות (לא עובר ללא): נניח שיש IS בגודל לפחות α אחוזים מהקודקודים, ונראה קיום צביעה של $\alpha \cdot k$ מהקודקודים. IS יכולה להשתמש בלכל היותר קודקוד אחד מכל ענן. לכן, אותו IS נוגעת בלכל היותר αk מהעננים. הקבוצה הבלתי תלוייה מגדירה צביעה של αk מהקודקודים באופן שאף אילוץ ביניהם לא הופר. ∎

משפט 1.10 לכל k,l שלמים, $\delta > 0$ מתקיים

$$\mathrm{Gap}_V - \mathrm{kCSG}[\delta, 1] \leq_L \mathrm{Gap}_V \mathrm{k}^{\mathrm{l}}\mathrm{CSG}\left[\delta^l, 1\right]$$

הוכחה: יהי $G=(V,E)$, ϕ הקלט לבעיית kCSG. בלי הגבלת הכלליות כל הגרפים מלאים, ואז נגדיר $G'=(V',E')$, עם

$$V'=V^l$$

כעת יש להגדיר את ϕ'. קבוצת הצבעים תהיה $\Sigma'=\Sigma^l$ בגודל k^l. נחשוב על צבע כעל וקטור באורך l גם כן. בהינתן שני קודקודים

$$u=(u_1,\ldots,u_l)\,,v=(v_1,\ldots,v_l)$$

האילוץ ביניהם יוודא קונסיסטנטיות עם ϕ. כלומר:

1. אם יש i,j עם $v_i=u_j$, אז נדרוש הצבע עבור v_i בתוך $c(v)$ יהיה זהה לצבע של u_j בתוך $c(u)$.
2. באופן כללי יותר, נרצה שהצבע של v_i בתוך $c(v)$ והצבע של u_j בתוך $c(u)$, לכל i,j, יקיימו את האילוץ $\phi(v_i,u_j)$.

נאותות נראה בשיעור הבא. שלמות: אם יש $c:V\to\Sigma$ המספק את כל ϕ, נגדיר $c':V'\to\Sigma'$ על ידי

$$c'(v_1,\ldots,v_l)=(c(v_1),\ldots,c(v_l))$$

וברור שזה עובד. ■

מסקנה 1.11

$$\mathrm{Gap-3SAT}\left(\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right)\le_L \mathrm{Gap}_V\mathrm{-3SAT}\left(\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right)\le_L \mathrm{Gap}_v\mathrm{-3^lCSG}\left[\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)^l,1\right]\le \mathrm{Gap-IS}\left[\frac{\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^l}{3^l},\right.$$

מזה נקבל שאין אלגוריתם שמקרב את IS בפקטור $\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)^l$ (אלגוריתם יעיל לפחות, וזה אם $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$).

מסקנה 1.12 אף אלגוריתם יעיל לא נותן קירוב קבוע עבור IS (או קליקה), לפחות אם $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$.

הערה 1.13 ישנו המשפט הבא: לכל $\varepsilon>0$, NP-קשה להכריע האם יש IS בגודל לפחות $n^{1-\varepsilon}$ או שכל IS הוא בגודל עד n^{ε} בגרף עם n קודקודים.