פונקציות מרוכבות

אסף נחמאס - asafnach@post.tau.ac.il

ציון - 90% בחינה
10% תרגילי בית (אם יש בודק)

ספרות -
Sarason - complex function theory
Ahlfors - complex analysis
Needham - Visual complex analysis

מספרים מרוכבים

נוסיף את שורש המשוואה $x^2+1=0$ ונקרא לו i.
במרוכבים, כל מספר הוא מהצורה $a+bi$ כש- $a,b\in\mathbb{R}$

פורמלית - המרוכבים הם זוגות של מס' ממשיים: $\mathbb{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

חיבור - $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

כפל - $(a+bi)\cdot(c+di)=a\cdot c+a\cdot di+bi\cdot c+bdi^2=$

$$=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

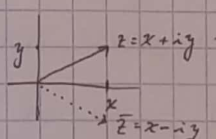
איבר היחידה לחיבור - $(0,0)$
איבר היחידה לכפל - $(1,0)$

תרגיל - $z_1(z_2z_3)=(z_1\cdot z_2)z_3$
$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

איך נמצא הופכי? נתון $(a,b)\in\mathbb{C}$. נחפש $(x,y)\in\mathbb{C}$ כך ש: $(1,0)=(a,b)(x,y)$
נקבל:
$x=\frac{a}{a^2+b^2}$, $y=\frac{-b}{a^2+b^2}$ (מוגדר היטב כאשר $(a,b)\neq(0,0)$)

נתייחס ל- $\mathbb{R}$ כאל חלק מ- $\mathbb{C}$. במקום $(x,0)$ נכתוב x.

נסמן: $i:=(0,1)$

הצגה גיאומטרית - 

הנורמה של z: $|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$

סימונים - אם $z=x+iy$, נסמן: $Re(z)=x$, $Im(z)=y$

הצמוד של $z=x+iy$: $\bar{z}=x-iy$

תרגילים - $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

$Re(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $Im(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, אש"מ ה-Δ: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

נסמן את הזווית של הווקטור עם ציר ה-x ב-θ, וב-r את אורכו ($r=|z|$)
נקבל שלכל $z\in\mathbb{C}$:

$\cos\theta=\frac{Re(z)}{|z|}$, $\sin\theta=\frac{Im(z)}{|z|}$, $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

הגדרה - עבור $z\in\mathbb{C}$ נסמן ב- $\arg(z)$ את קב' הזויות שמתאימות ל- z:

$\arg(z)=\{\theta+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ (θ מקיימת את הנדרש)

נסמן ב- $\mathrm{Arg}(z)$ את הזוית היחידה θ_0 המקיימות $-\pi<\theta\le\pi$

דוגמה - $\mathrm{Arg}(-2)=\pi$, $\mathrm{Arg}(i)=\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arg}(\overline{1+i})=-\frac{\pi}{4}$

כפל - $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

מכפל וזהויות נקבל - $z\cdot w=r\rho(\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi))$

ולכן גם - $|z|\cdot|w|=|z\cdot w|$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

סימון - בהינתן זוית θ : $e^{i\theta}:=\cos\theta+i\sin\theta$

* מתקיים $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}=e^{i(\theta+\varphi)}$

אם $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ אז $z^n=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ לכל $n\in\mathbb{N}_+$

ניתן לרשום גם: $z=re^{i\theta}$ ולקבל $z^n=r^n e^{in\theta}$

שורשים - יהי $z\in\mathbb{C}$, $z\neq0$.

נסמן $z=re^{i\theta}$. אז ל- z יש בדיוק n שורשים מסדר n.

הם: $r^{1/n}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$ לכל $0\le k\le n-1$

תרגיל - הוכיחו זאת.

טופולוגיה

סימונים - יהי $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$.

1. דיסק פתוח סביב z_0 ברדיוס r : $D_{z_0}(r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z_0-z|<r\}$
2. דיסק סגור : $\overline{D_{z_0}(r)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z_0-z|\le r\}$
3. הדיסק המנוקב : $D^*_{z_0}(r)=\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z_0-z|\le r\}$
4. מעגל סביב z_0 ברדיוס r: $\partial D_{z_0}(r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z_0-z|=r\}$

הגדרה - $U\subseteq\mathbb{C}$ תקרא פתוחה אם לכל $z\in U$ קיים $r>0$ כך ש: $D_z(r)\subseteq U$

הגדרה - $A\subseteq\mathbb{C}$. $z\in A$ נקראת נקודה פנימית אם קיים $r>0$ כך ש: $D_z(r)\subseteq A$

נסמן ב- $\mathrm{Int}(A)$ את קבוצת הנקודות הפנימיות.

טענה - $\overline{D_{z_0}(r)}$ אינה קב' פתוחה, $\mathrm{Int}(\overline{D_{z_0}(r)})=D_{z_0}(r)$

הגדרה - $F\subseteq\mathbb{C}$ סגורה אמ"מ $F^c=\mathbb{C}\setminus F$ פתוחה.

טענה - איחוד כלשהו וחיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח.
- איחוד סופי וחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור.

הגדרה - אם $A\subseteq\mathbb{C}$ אז $\overline{A}:=\bigcap_{\substack{F \text{ סגורה} \\ A\subseteq F}} F$ הוא הסגור של A.

* מהטענה, $\overline{A}$ סגורה.

הגדרה - **השפה** של קב' A היא $\partial A = \bar{A} \setminus Int(A)$

טענה - $A \subset \mathbb{C}$.

1. $z \in \partial A$ אמ"מ לכל $r>0$, $D_z(r)\cap A \neq \emptyset$ וגם $D_z(r)\cap A^c \neq \emptyset$
2. $\bar{A} = \partial A \cup Int(A)$
3. $\partial A, \bar{A}$ סגורות
4. $F \subseteq \mathbb{C}$ סגורה אמ"מ $F = \bar{F}$.

סדרות

הגדרה - $\{z_n\}$ סדרה ב-$\mathbb{C}$.
נאמר ש- $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$
כך שלכל $n\ge N$, $|z_n - z|<\varepsilon$ $\left(|z_n - z| \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$

טענה - $\{z_n\}$ מתכנסת אמ"מ $\{Re(z_n)\}$, $\{Im(z_n)\}$ מתכנסות.
ואז נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} Re(z_n) + i \lim_{n\to\infty} Im(z_n)$$

טענה - אם $z_n\to z$, $w_n \to w$ אז:

$z_n \pm w_n \to z \pm w$

$z_n \cdot w_n \to z\cdot w$

$\overline{z_n} \to \overline{z}$, $|z_n| \to |z|$

$\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$ $(w_n\neq 0)$

טענה - $A\subseteq\mathbb{C}$. $z\in\bar{A} \longleftrightarrow$ קיימת סדרה $\{z_n\}\subseteq A$ כך ש- $z_n\to z$.

הגדרה - תהי $A\subseteq\mathbb{C}$, $f:A\to\mathbb{C}$ תיקרא __רציפה__ ב- $z_0\in A$ אמ"מ
לכל סדרה $z_n\to z_0$, $\{z_n\}\subseteq A$, מתקיים $f(z_n)\to f(z)$.
נאמר כי f רציפה אם היא רציפה בכל A.

טענה - $f:A\to\mathbb{C}$, $g:B\to\mathbb{C}$ רציפה ב- $z_0\in A\cap B$, אזי:

- $f\pm g$ רציפה ב- z_0
- $f\cdot g$ -"- -"-
- $Re(f), Im(f)$ רציפות ב- z_0
- אם $g(z_0)\neq0$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב- z_0.

טענה - $f:A\to\mathbb{C}$ רציפה ב- z_0, $g:B\to\mathbb{C}$, $f(A)\subset B$, ו- g רציפה ב- $f(z_0)$.
אז $g\circ f: A\to\mathbb{C}$ רציפה ב- z_0.

טענה - $U\subseteq\mathbb{C}$, $f:U\to\mathbb{C}$ רציפה אמ"מ לכל $V\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה, $f^{-1}(V)$ פתוחה.

קבוצות קומפקטיות

הגדרה - $A\subseteq\mathbb{C}$ חסומה אם קיים סכר כך ש- $A\subseteq D_0(R)$

טענה - $\{z_n\}$ חסומה ב- $\mathbb{C}$. אז יש לה תת"ס מתכנסת.

הוכחה - $z_n=x_n+iy_n$. $|x_n|,|y_n|<|z_n|$. אז מחסימות z_n, $\{x_n\}$ סדרה חסומה. אז מבולצאנו-ויירשטראס, יש תת"ס $\{x_{n_k}\}$ מתכנסת ל- x.
נסתכל על $\{y_{n_k}\}$. גם היא חסומה ולכן יש לה תת"ס מתכנסת $\{y_{n_{k_\ell}}\}$ ל- y. כמובן שגם $\{x_{n_{k_\ell}}\}$ מתכנסת ל- x.

לכן $z_{n_{k_\ell}}\to x+iy$.

הגדרה - $A\subseteq\mathbb{C}$ קומפקטית אם לכל סדרה $\{z_n\}\in A$ יש תת"ס מתכנסת $z_n\to z$ ו- $z\in A$.

טענה - קומפקטית $\longleftrightarrow$ סגורה וחסומה.

הוכחה - $\rightarrow$ אם הקבוצה סגורה וחסומה, מטענה קודם שלכל סדרה בקבוצה יש תת"ס מתכנסת, ומסגירות הגבול בקבוצה.

$\leftarrow$ A קומפקטית. A חסומה, אחרת יש סדרה z_n כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $n<|z_n|$. כל תת"ס z_{n_k} תקיים $|z_{n_k}|\geq n_k$, ולפיכך לא תתכנס.
A גם סגורה, מכיוון שאם $\{z_n\}\subseteq A$ סדרה מתכנסת $z_n\to z$ לפי הגדרת קומפקטיות $z\in A$, ומכאן A סגורה.

טענה - $f:A\to\mathbb{C}$ רציפה ו- $K\subseteq A$ קומפקטית אז $f(K)$ קומפקטית.

טענה - $K\subset\mathbb{C}$ היא קומפקטית אמ"מ לכל קב' פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך ש- $K\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ יש $I_0\subset I$ סופית כך ש- $K\subset\bigcup_{\alpha\in I_0}U_\alpha$.

קשירות מסילתית

הגדרה - מסילה היא פונ' רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ עבור $a<b$ ממשיים.
מסילה מ- z_1 ל- z_2 היא כזו ש- $\gamma(a)=z_1$ ו- $\gamma(b)=z_2$.

הגדרה - $A\subset\mathbb{C}$ תיקרא קשירה מסילתית אם לכל $z_1,z_2\in A$ יש מסילה מ- z_1 ל- z_2 שכל ערכיה ב- A.

הגדרה - $A\subset\mathbb{C}$ תיקרא תחום (Domain) אם היא פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה - אם A תחום, אז לכל $z_1,z_2\in A$ יש מסילה המחברת ביניהם המורכבת מקטעים שמקבילים לצירים.

הוכחה - נקח מסילה כלשהי $\gamma:[a,b]\to A$ בין z_1 ל- z_2.
אז לכל $t\in[a,b]$ יש דיסק $D_t\subset A$ שמרכזו $\gamma(t)$.
הם $\{D_t\}_{t\in[a,b]}$ כיסוי של $\gamma[a,b]$. לכן יש תת כיסוי סופי $\{D_t\}_{t=1}^{n}$
נניח ש- $t_1=a$, $t_n=b$, $t_1<t_2<\dots<t_n$.
(צריך לטעון שאפשר לקחת $D_i\cap D_{i+1}\neq\emptyset$)
ואז לוקחים מסילות מקבילות לצירים בכל D_t.

Scanned by CamScanner

הנגזרת המרוכבת

תהי $f: D \to \mathbb{C}$, D קבוצה פתוחה, $z_0 \in D$.
f תיקרא **גזירה** במובן המרוכב ב- z_0 אם קיים הגבול:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

כלומר: $\forall(\varepsilon>0) . \exists(\delta>0) . \forall(h \in \mathbb{C}\ 0<|h|<\delta) . \left[\left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \right]$

* קיום נגזרת מרוכבת זו דרישה יותר חזקה מקיום נגזרת ממשית.
למשל, נוכיח בהמשך שאם f גזירה בכל נקודה, אז גם f' גזירה.

הגדרה - נאמר ש- f היא **אנליטית** או **הולומורפית** אם היא גזירה בכל D.

דוגמה - $f \equiv Const$, $f(z) = z$, $f(z) = z^n$

טענה - $f(z) = \bar{z}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אינה גזירה בכל נקודה.

הוכחה - נראה שאין גבול:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

אם $h \to 0$ מהכיוון הממשי, למשל $h_n = \frac{1}{n}$, אז $\frac{\bar{h}_n}{h_n} \to 1$, ואז $\bar{h}_n = \frac{1}{n}$
אם אם $h \to 0$ מהכיוון המרוכב, אז $\frac{\bar{h}_n}{h_n} \to -1$

טענה - גזירות $\to$ רציפות.

הוכחה - לכל h קטן מספיק $|f(z_0+h) - f(z_0)| \le c \cdot |h|$

תכונות רגילות
- $(cf)' = cf'$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + g'f$
- אם $g(z) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

דוגמה - פולינומים הם הולומורפים, וגם פונ' רציונליות (חילוק של פולינומים) בכל מקום בו הן מוגדרות.

כלל השרשרת - g גזירה ב- z, f גזירה ב- $w = g(z)$.
אז $f \circ g$ גזירה ב- z ו-:

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

"הוכחה" -
$$\frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{h} = \frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{g(z+h) - g(z)} \cdot \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

משוואות קושי-רימן

תזכורת - $f: D \to \mathbb{C}$ גזירה ב- z_0 : $f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

נמצא את הקשר בין גזירות מרוכבת לגזירות ממשיות ב-$\mathbb{R}^2$.

נניח f גזירה במובן המרוכב ב- $z=z(x,y)$

נכתוב - $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, $u,v : D\to\mathbb{R}$

נקח $h\to 0$ בכיוון x ובכיוון y.

כיוון x - $h=k\xrightarrow{\in\mathbb{R}}0$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+k,y)+i\cdot v(x+k,y)-u(x,y)-i\cdot u(x,y)}{k}=$$

$$=\frac{du}{dx}\Big|_z+i\frac{dv}{dx}\Big|_z$$ (נסמן u_x, v_x) (שיוויון מתקיים בגבול)

כיוון y - $h=il,\ l\xrightarrow{\in\mathbb{R}}0$

$$f'(z)=\lim_{l\to0}\frac{f(z+il)-f(z)}{il}=\frac{1}{i}\left[\lim_{l\to0}\frac{u(x,y+l)+i\cdot u(x,y+l)-u(x,y)-i\cdot u(x,y)}{l}\right]=$$

$$=\frac{1}{i}\left[u_y+i\cdot v_y\right]=v_y\big|_z-i\,u_y\big|_z$$

מסקנה - אם f גזירה ב- z אז בנק' z - $\boxed{\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases}}$ ← משוואות קושי רימן

אם f גזירה ב- z, ונניח שיש לה קירוב לינארי, אז קירוב זה חייב להיות מהצורה:
$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}$$

טענה - אם קיימות ורציפות u_x,u_y,v_x,v_y ומקיימים את משוואות C-R ב-z, אז f גזירה ב-z.

הוכחה - נכתוב $z=(x,y)$, $h=k+il$, $k,l\in\mathbb{R}$, ונניח $h\to0$ ($k,l\to0$)
מטפס טיילור -

$$u(x+k,y+l)-u(x,y)=\overset{\alpha}{u_x}\cdot k+\overset{\beta}{u_y}\cdot l+\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1=o(|h|)$$

$$v(x+k,y+l)-u(x,y)=\underset{-\beta}{v_x}\cdot k+\underset{\alpha}{v_y}\cdot l+\varepsilon_2,\quad \varepsilon_2=o(|h|)$$

$$f(z+h)-f(z)=\alpha k+\beta l+i(-\beta k+\alpha l)+\varepsilon_1+\varepsilon_2=$$

$$=k(\alpha-i\beta)+l(\beta+i\alpha)+\varepsilon_1+\varepsilon_2=$$

$$=(\alpha-i\beta)k+il(\alpha-i\beta)+\varepsilon_1+\varepsilon_2=$$

$$=(\alpha-i\beta)(k+il)+\varepsilon_1+\varepsilon_2=(\alpha-i\beta)\cdot h+\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$\boxed{f'(z)=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\xrightarrow{h\to0}\alpha-i\beta}$$

תרגיל - הוכיחו ש- $f(z)=\sqrt{|x\cdot y|}$ אינה גזירה בראשית, למרות שמקיימת C-R.

משוואות קושי-רימן

משפט 1 - D הוא תחום. $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית. אם $f'(z)=0$ $\forall z\in D$, אז f קבועה על D.

משפט 2 - $f:D\to\mathbb{C}$, D תחום, f הולומורפית. אם $Im(f)$, $Re(f)$, או $|f|$ קבועה אז f קבועה.

דוגמה - אם $f(z)=1+i\cdot u(z)$ ו- v לא קבועה, אז לפי משפט 2, f אינה הולומורפית.

למה - אם $u:D\to\mathbb{R}$ גזירה במובן הממשי, ולכל $z\in D$, $u_y(z)=u_x(z)=0$, אז u קבועה.

הוכחה - תהיינה $z_1,z_2\in D$. נוכיח $u(z_1)=u(z_2)$.
נבחין שעל קטע אנכי או אופקי ב-D, u קבועה עליו.
$f(t)=u(x+t,y)$, $f'(t)=0=u_x(x+t)$

הוכחנו שבין z_1 ל-z_2 יש מסילה ב-D שמורכבת מקטעים שמקבילים לצירים. לפיכך $u(z_1)=u(z_2)$

הוכחת 1 - $f'(z)=0$ $\leftarrow$ מ- C-R

$$\forall z\in D \begin{cases} u_x=0 \\ v_x=0 \\ u_y=0 \\ v_y=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{למה}} u,v \text{ קבועות}$$

הוכחת 2 - נניח $u=Re(f)=const$ $\leftarrow$ $\forall z.\ u_x=u_y=0$ $\leftarrow$
מ- C-R, $\forall z.\ v_x=v_y=0$ $\leftarrow$ מהלמה u,v קבועות

כנ"ל אם $Im(f)$ קבוע.

אם $|f|=const$, כלומר $u^2+v^2=const$ $\forall z\in D$.
אם $const=0$, סיימנו כי $f\equiv 0$.
אם $const>0$, נגזור את המשוואה ב-x ו-y:

$$\begin{cases} 2u\cdot u_x+2v\cdot v_x=0 \\ 2u\cdot u_y+2v\cdot v_y=0 \end{cases}$$

נציב את C-R:

$$\begin{cases} u\cdot u_x-v\cdot u_y=0 \\ v\cdot u_x+u\cdot u_y=0 \end{cases}$$

נכפיל את 1 ב-v, 2 ב-u:

$$\begin{cases} v\cdot u\cdot u_x-v^2u_y=0 \\ vu\cdot u_x+u^2u_y=0 \end{cases}$$

נחסר את 2 מ-1: $(u^2+v^2)u_y=0 \Rightarrow u_y\equiv 0$

קיצר ממשיכים ומקבלים גם $u_x\equiv 0$, ומהלמה סיימנו.

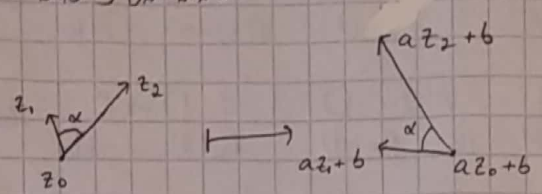
פונקציות הולומורפיות שומרות זוית

הפונ' הלינארית $z \mapsto a\cdot z+b$. $a,b\in\mathbb{C}$

$$z \xrightarrow{\text{מתיחה}} |a|\cdot z \xrightarrow{\frac{a}{|a|}} a\cdot z \xrightarrow{\text{הזזה}} a\cdot z+b$$

סיבוב בזוית שהיא הארגומנט של a

שמירת זוית -

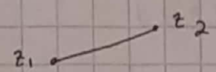


כלומר - זוית בין 2 וקטורים נשמרת תחת ההעתקה.

נראה תכונה דומה לפונ' הולומורפית בכל מקום בו $f'\neq 0$

עקומות

הגדרה - מסילה ב- $\mathbb{C}$: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה.

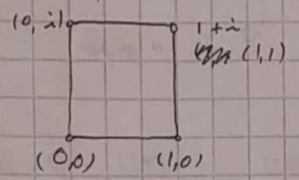


דוגמה - 1. $\gamma(t)=(1-t)z_1+tz_2$ $\quad t\in[0,1]$

2. $\gamma(t)=\cos t+i\sin t$ $\quad t\in[0,2\pi]$ מעגל נגד כיוון השעון

3. $\gamma(t)=\cos t-i\sin t$ $\quad t\in[-2\pi,2\pi]$ מעגל עם כיוון השעון פעמיים

4. $\gamma(t)=\begin{cases} t & t\in[0,1] \\ 1+(t-1)i & t\in[1,2] \\ i+3-t & t\in[2,3] \\ (4-t)i & t\in[3,4] \end{cases}$



הגדרה - עקומה נקראת גזירה ב- $t_0\in[a,b]$ אם החלק הממשי והמדומה שלה גזירים, כלומר - $\gamma'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$

נקרא לה גזירה אם היא גזירה בכל נקודה.

גזירה ברציפות - גזירה והנגזרת רציפה. (C^1)

γ נקראת רגולרית ב- t_0 אם גזירה ב- t_0 ו- $\gamma'(t_0)\neq\binom{0}{0}$.
$\gamma(t_0)$ הוא וקטור המהירות שמשיק לעקומה.
הכיוון של וקטור זה הוא בדיוק $\operatorname{Arg}(\gamma'(t_0))$

נניח ש- γ_1 ו- γ_2 שתי עקומות כך ש- $\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)$, γ_1 רגולרית ב- t_1, γ_2 רגולרית ב- t_2. הזוית בין γ_1 ל- γ_2 בנק' ההשקה היא בדיוק:
$\alpha=\operatorname{Arg}(\gamma_2'(t_2))-\operatorname{Arg}(\gamma_1'(t_1))$ (זה אינו סימטרי)

נניח ש- $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית, ו- γ עקומה ב- D, אז גם $f\circ\gamma$ עקומה, ואם γ גזירה ב- t_0, אז:
$(f\circ\gamma)'(t)=f'(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)$

אם γ רגולרית ב- t_0, ו- $f'(\gamma(t_0))\neq 0$ אז $f\circ\gamma$ רגולרית ב- t_0, וכיוון המשיק לעקומה ב- t_0 הוא:
$\operatorname{Arg} f'(\gamma(t_0))+\operatorname{Arg}\gamma'(t_0)$

משפט- אם $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית, $z_0\in D$, $f'(z_0)\neq 0$

γ_1,γ_2 עקומות $\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)$ רגולריות ב- t_1, t_2.

אז הזווית בין $f\circ\gamma_1$ לבין $f\circ\gamma_2$ בנק' החיתוך

שווה לזווית בין γ_1 ל- γ_2 בנק' החיתוך.

העתקה כזאת (שומרת זוויות) נקראת העתקה קונפורמית.

הולומורפי ונגזרת לא 0 $\leftarrow$ קונפורמיות.

משפט ללא הוכחה- $f:D\to\mathbb{C}$ גזירה במובן חדו"א ב-z_0, אז:

f שומרת על זוויות ב- z_0 $\longleftrightarrow$ f גזירה במובן המרוכב ב-z_0, $f'(z_0)\neq 0$

הערה- $f(z)=z^2$ בנק' $z=0$, $f'(0)=0$

נסתכל על הזווית בין 1 ל- i : $90°$.

אבל $f(1)=1$, $f(i)=-1$. הזווית: $180°$.

העתקה זו לא משמרת זוויות! (היא מכפילה פי 2)

העתקת מוביוס

הגדרה- העתקת מוביוס היא $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$

כאשר $(c,d)\neq(0,0)$, ו- $ad-bc\neq 0$ (מוגדר עבור $z\neq-\frac{d}{c}$ אם $c\neq 0$)

(התנאי האחרון שקול לכך שההעתקה אינה קבועה)

כל העתקת מוביוס מתאימה למטריצה שערכיה מרוכבים $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

כאשר a,b,c,d מקיימים את התנאים.

נסמן $h_A(z)=\frac{az+b}{cz+d}$

מסתבר שאם A,B מטריצות כאלה, אז $h_A\circ h_B=h_{A\cdot B}$

כפל מטריצות

ולכן $h_A^{-1}=h_{A^{-1}}$. (לכן $ad-bc\neq 0$ $\leftrightarrow$ A הפיכה)

אוסף כל העתקות המוביוס הוא חבורה עם פעולת ההרכבה, ואיבר יחידה $h(z)=z$

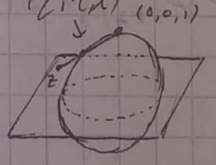
הטלה סטריאוגרפית

נתייחס ל- $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ כחלק מ- $\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=0\}$ ותהי

$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$

כל נקודה $z\in\mathbb{R}^2$ ביחד עם הקוטב הצפוני $(0,0,1)$ קובעת ישר יחיד ב-$\mathbb{R}^3$.

נקודת החיתוך של ישר זה (ששונה מ-$(0,0,1)$) עם S^2 נסמן ב- (ξ,η,ζ)



הגדרנו העתקה מ-$\mathbb{R}^2$ ל- $S^2\setminus(0,0,1)$

$z\longmapsto(\xi,\eta,\zeta)$

העתקה זו היא חח"ע ועל, ונקראת ההטלה הסטריאוגרפית.

ניסוח מפורש: אם $z=(x,y)$, הקו הישר בין z ל- $(0,0,1)$ הוא $(tx,ty,1-t)$ כאשר $\infty < t < \infty$ -.

כדי שהנקודה $(tx,ty,1-t)$ תהיה על S^2 נדרוש כי $t^2x^2+t^2y^2+(1-t)^2=1$

אם נפתח סוגריים נקבל 2 פיתרונות: $t=0 \to (0,0,1)$, וגם $t=\frac{2}{x^2+y^2+1}$

כלומר -
$$z \longmapsto \left(\frac{2Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right)$$

ההעתקה ההפוכה:
$$(\xi,\eta,\lambda) \longmapsto \frac{\xi+i\eta}{1-\lambda}$$

אבחנות

- קו המשווה ב-S^2 $\longleftrightarrow$ מעגל היחידה ב $D_0(1)$
- חצי הכדור הדרומי $\longleftrightarrow$ $D_0(1)$
- -"- הצפוני $\longleftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus\overline{D_0(1)}$
- מעגל ספרי (חיתוך של מישור עם S^2) שעובר בקוטב הצפוני $\longleftrightarrow$ קו ישר
- מעגלים ספריים אחרים $\longleftrightarrow$ מעגלים ב-$\mathbb{R}^2$

* נגדיר $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ההטלה הסטריאוגרפית היא חח"ע ועל מ-$\hat{\mathbb{C}}$ ל-S^2

המרחב הפרויקטיבי המרוכב

נתבונן ב- $\mathbb{C}^2=\{(z_1,z_2)|z_1,z_2\in\mathbb{C}\}$ - מרחב וקטורי מרוכב.

נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{C}^2\setminus\{0,0\}$ ע"י
$(z_1,z_2)\sim(w_1,w_2)$ $\longleftrightarrow$ קיים $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ כך ש- $(z_1,z_2)=\lambda(w_1,w_2)$

ק"ב מחלקות השקילות היא המרחב הפרויקטיבי המרוכב, נסמנו ב- $\mathbb{C}P^1$
ממימד 1

מחלקת שקילות היא "קו מרוכב" או תת מרחב ליניארי של $\mathbb{C}^2$. כלומר:
$\{(z_1,z_2)|z_1=az_2\}$ עבור $a\in\mathbb{C}$ כלשהו.

נווכח שיש העתקה חח"ע ועל $\varphi:\mathbb{C}P^1\to\hat{\mathbb{C}}$

תהי $[z_1,z_2]\in\mathbb{C}P^1$. אם $z_2\neq0$: $\varphi([z_1,z_2])=\varphi([\frac{z_1}{z_2},1])=\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{C}$

אם $z_2=0$: $\varphi([z_1,0])=\varphi([1,0])=\infty$

על $\mathbb{C}^2$ יש העתקות ליניאריות הנתונות ע"י מטריצות $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$.

כל העתקה כזאת שהיא הפיכה מעבירה תת מרחב ממימד 1 לתת מרחב ממימד 1. לכן אם $(z_1,z_2)=\lambda(w_1,w_2)$ אז $A\binom{z_1}{z_2}=\lambda A\binom{w_1}{w_2}$

ולכן $A\binom{z_1}{z_2}\sim A\binom{w_1}{w_2}$, וזה אומר.

כלומר, A מגדירה העתקה הפיכה מ- $\mathbb{C}P^1$ לעצמו.

כלומר- $[A]:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$, $p=[z_1,z_2]\in\mathbb{C}P^1$ ע"י:

$$[A](p):=\left[A\binom{z_1}{z_2}\right]\in\mathbb{C}P^1$$

ההעתקה מוגדרת היטב והפיכה לפי התכונות הנ"ל.

קיבלנו העתקות: $\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\psi^{-1}} \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{[A]} \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\varphi} \hat{\mathbb{C}}$

אז אם $z \in \mathbb{C}$:

$$A\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \frac{az+b}{cz+d}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \frac{a}{c} = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

עבור כל A כזו, קיבלנו $\phi_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ המוגדרת ע"י:

$$\phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\phi_A(\infty) = \frac{a}{c} = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

מכאן נסיק שאם A_1, A_2 הן שתי העתקות לינאריות הפיכות על $\mathbb{C}^2$ אז:

$$\phi_{A_1} \circ \phi_{A_2} = \phi_{\underbrace{A_1 \cdot A_2}_{\text{כפל מטריצות}}}$$

תכונות העתקות מביוס

1) $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $h'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$

כלומר, ס"ע בכל נקודה בה מוגדרת.

2) נ"ק השבת של העתקות מביוס:

טענה - אם $A \neq I$, אז מספר נקודות השבת הוא 1 או 2 (ב- $\hat{\mathbb{C}}$)

הוכחה - אם $c=0$ אז $h_1(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ואז יש נ"ק שבת אחת ב- ∞

אם $c \neq 0$ אז z היא נ"ק שבת אמ"מ $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$

שזה שקול ל- $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

ולזה יש לכל היותר 2 פתרונות.

3) 3 נ"ק ~~...~~ קובעות את העתקת מביוס

משפט - $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$

אז קיימת ויחידה ה' מוביוס h כך ש- $h(z_i) = w_i$, $i=1,2,3$

הוכחה - יחידות: אם h_1, h_2 מקיימות זאת אז $h_1 \circ h_2^{-1}$ היא העתקת מביוס עם 3 נקודות שבת, לכן היא הזהות: $h_1 = h_2$.

קיום: נוכיח עבור מקרה פרטי בו $w_1 = \infty, w_2 = 0, w_3 = 1$.

נגדיר h ע"י:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_1)(z_2-z_3)} & z_1, z_2, z_3 \neq \infty \\ \dfrac{z-z_2}{z_3-z_2} & z_1 = \infty \\ \vdots & \\ \text{באופן דומה ל} & z_{3,2} = \infty \end{cases}$$

במקרה הכללי, תהא h_1 מעבירה את z_1,z_2,z_3 ל- $\infty,0,1$
ו- h_2 את w_1,w_2,w_3 ל- $\infty,0,1$.
אז $h_2^{-1}\circ h_1$ מקיימת את הדרוש.

פירוק העתקות מביוס

כל העתקת מביוס היא הרכבה של העתקות מהצורה:

א- $K>0$ ממשי $\quad z\longmapsto K\cdot z \quad \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (מתיחה, כיווץ)

ב- $|\lambda|=1$, $\lambda\in\mathbb{C}$ $\quad z\longmapsto \lambda z \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (סיבוב)

ג- $b\in\mathbb{C}$ $\quad z\longmapsto z+b \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (הזזה)

ד- $\quad z\longmapsto \frac{1}{z} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (אינברסיה)

ואז אם $c\neq 0$ אז:

$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c(cz+d)}+\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c^2z+cd}+\frac{a}{c}$$

וניתן לראות שזהי הרכבה של העתקות הנ"ל.

הגדרה - מעגל מוכלל זה מעגל ב- $\mathbb{C}$ או ישר ב- $\mathbb{C}$ עם ∞

משפט - העתקת מביוס מעבירה מעגל מוכלל למעגל מוכלל

הוכחה - רק צריך לבדוק עבור $z\longmapsto\frac{1}{z}$.
משוואת המעגל המוכלל היא:

$$\alpha|z|^2+\beta Re(z)+\gamma Im(z)+\delta=0$$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, אם $\alpha=0$ זה ישר

נניח $z=\frac{1}{w}$, נציב ונקבל:

$$\frac{\alpha}{|w|^2}+\beta\frac{Re(w)}{|w|^2}-\gamma\frac{Im(z)}{|w|^2}+\delta=0$$

$$\alpha+\beta Re(w)-\gamma Im(z)+\delta|w|^2=0$$

גם זה מעגל מוכלל.
וזה מסיים את הטענה.

פונקציות אלמנטריות וענפים

הגדרה - $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ לכל $y\in\mathbb{R}$

נגדיר עבור $z=x+iy$ - $e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

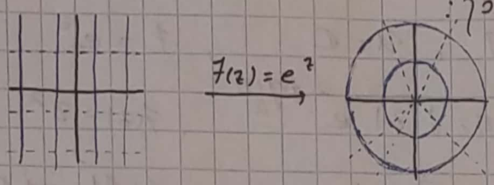
נובע - 1) $\forall z\in\mathbb{C}.\ e^z\neq 0$

2) $\forall z_1,z_2.\ e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

3) $e^{z_1-z_2}=e^{z_1}/e^{z_2}$

4) בעלת מחזור $2\pi i$, כלומר - $\forall z\in\mathbb{C}.\ e^{z+2\pi i}=e^z$

ההעתקה מתנהגת כך:



טענה - $f(z)=e^z$ הולומורפית

הוכחה - $e^{x+iy}=\underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$

$v_y=e^x\cos y=u_x\quad,\quad -v_x=-e^x\sin y=u_y$

ולכן, מפני שהן רציפות ומקיימות את C-R, f הולומורפית.

בנוסף - $e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y=u_x+iv_x=(e^z)'$

נאמר ש- e^z היא הרחבה הולומורפית של e^x (פונ' מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$)

הגדרה - $\sin(z):=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z):=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

הולומורפיות וערכיהן ב- $\mathbb{R}$ הן $\sin(y)=\sin(y)$, $\cos(y)=\cos(y)$

תרגיל קל - $\sin,\cos$ מחזוריות עם מחזור 2π

- אינן חסומות
- $\forall z\in\mathbb{C}.\ \sin^2(z)+\cos^2(z)=1$
- $\sin(z+w)=\sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)$

לוגריתם

בהינתן $w\in\mathbb{C}$, צריך למצוא $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $e^z=w$.

בחר עשום z פיתרון, $z+2\pi ik$, $k\in\mathbb{N}$ גם פיתרון

נגדיר - $\operatorname{Log}:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ ע"י $\operatorname{Log}(z):=\ln|z|+i\operatorname{Arg}(z)$

$e^{\operatorname{Log} z}=e^{\ln|z|}\cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)}=z$

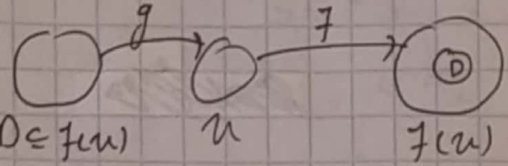
Scanned by CamScanner

Log רציפה רק ב- $\mathbb{C}\setminus[-\infty,0]$

נגדיר כי Log הינו "ענף של $(e^z)^{-1}$ ב- $\mathbb{C}\setminus[-\infty,0]$"

ענפים של פונקציה הולומורפית

$U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $f: U \to \mathbb{C}$, $D \subseteq f(U)$ פתוחה, $g: D \to U$



הגדרה - g הפוכה ימנית ל- f אם $f(g(z)) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

דוגמאות - 1. $f = e^z$, $U = \mathbb{C}$, $f(U) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $g(z) = Log(z)$

2. $f(z) = z^2$, $g_1(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{Arg(z)}{2}}$, $g_2(z) = -g_1(z)$

הגדרה - $f: U \to \mathbb{C}$, $D \subseteq f(U)$ תחום "ענף של f^{-1} ב- D" היא פונ' $g: D \to U$ הפיכה ימנית של f, ורציפה.

לדוגמה - Log בתחום $\mathbb{C}\setminus[-\infty,0]$, g_1, g_2 בתחום $\mathbb{C}\setminus[-\infty,0]$

טענה - $f: U \to \mathbb{C}$ הולומורפית, g ענף של f^{-1} ב- $D \subseteq f(U)$.
תהא $z_0 \in D$ ו- $w_0 = g(z_0) \in U$.
אם $f'(w_0) \neq 0$ אז g גזירה ב- z_0 ומתקיים $g'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$

סיבה - נסמן $g(z_0) = w$, $f(w) = z$.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{w-w_0}{f(w)-f(w_0)} = \frac{1}{f'(w_0)}$$

רציפות f, g.

טענה - אם L ענף של $(e^z)^{-1}$ ב- D אז ישנו $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $L(z) = Log(z) + 2\pi i k$
(לפיכך, $Log|z| + i[Arg(z) + 2\pi k]$ הם כל הענפים).

סיבה - עבור L כנ"ל, מהטענה, $L'(z) = \frac{1}{e^{L(z)}} = \frac{1}{z}$, אך גם $Log'(z) = \frac{1}{z}$

לכן $(L - Log)'(z) = 0$ $\forall z \in D$.

לכן ממשפט שהוכחנו, $L - Log \equiv c$, מכאן $1 = \frac{e^{L(z)}}{e^{Log(z)}} = e^{L(z) - Log(z)}$

ולכן קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $c = 2\pi i k$.

ענפים של שורש p

$p\geq 2$ מס' טבעי, $f(z)=z^p$.

דוגמה לענף - $g(z)=\sqrt[p]{|z|}\cdot e^{\frac{i\,Arg(z)}{p}}$.

g הפוכה ימנית וענף של $(z^p)^{-1}$ בתחום $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

נבחין - $f'(z)=pz^{p-1}$ ולפיכך $f'(z)\neq 0 \leftrightarrow z\neq 0$.
לכן אם g ענף ב- D, אז g הולומורפית:
$$g'(z)=\frac{1}{f'(g(z))}=\frac{1}{pg(z)^{p-1}}=\frac{g(z)}{pg(z)^p}=\frac{g(z)}{pz}$$

טענה - נניח $g: D\to\mathbb{C}$ $[D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]]$ ענף של שורש p (כלומר של $(z^p)^{-1}$).
אז קיימים בדיוק p ענפים שונים הולומורפיים של שורש p ב- D וכולם מהצורה $\xi_0 g, \xi_1 g, \dots, \xi_{p-1} g$ כש- $\xi_0 \dots \xi_{p-1}$ הם p שורשי היחידה מסדר p.

הוכחה - ברור כי $\xi_i g$ הינה ענף הולומורפי לכל $i=0\dots p-1$,
כיוון ש- $f(\xi_i g(z))=[\xi_i g(z)]^p=z$

יהי h ענף הולומורפי של שרש p. $\forall z\in D.\ h(z)^p=z$.
נגזור משני הצדדים ונקבל: $p\cdot h(z)^{p-1}\cdot h'(z)=1$.
לפיכך $h'(z)=p\overline{h^{p-1}(z)}$, וכיוון ש- h הולומורפית נובע כי $h(z)\neq 0\ \forall z\in D$.

נסמן $l(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$, אז $\forall z\in D.\ l(z)^p=\frac{h(z)^p}{g(z)^p}=1$

מכאן ש- $l(z)\in\{\xi_0 \dots \xi_{p-1}\}\ \forall z\in D$.

l רציפה בתחום קשיר, לכן יש $i\in\{0\dots p-1\}$ כך ש- $l(z)=\xi_i$ לכל $z\in D$. לכן $h=\xi_i\cdot g$

ענפים של חזקת λ: $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$, $D\subseteq\mathbb{C}$, ונניח ש- L הוא ענף של $(e^z)^{-1}$ (ענף של Log).
נגדיר $z^\lambda:=h_{\lambda,L}(z)=e^{\lambda L(z)}$

Scanned by CamScanner

טורים

הגדרה - תהא $\{c_n\}$ סדרת מס' מרוכבים.
הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס אמ"מ הסדרה $S_n = \sum_{n=0}^{N} c_n$ מתכנסת, אחרת מתבדר.

קריטריון קושי - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ יש N_0 כך שלכל $N>M>N_0$ מתקיים:
$\left|\sum_{n=M}^{N} c_n\right| < \varepsilon$ (בפרט), $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס אז $|c_n| \to 0$

תרגיל - אם $|c|<1$ אז $\sum c^n = \frac{1}{1-c}$, אם $|c| \geq 1$ אז $\sum c^n$ מתבדר.

התכנסות בהחלט - נאמר ש- $\sum c_n$ מתכנס בהחלט אמ"מ $\sum |c_n|$ מתכנס.
+ התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

התכנסות במ"ש - $\{g_n\}$ סדרת פונקציות מרוכבות $\forall n.\ g_n : S \to \mathbb{C}$
הסדרה מתכנסת במ"ש על S אמ"מ קיימת $g: S \to \mathbb{C}$ כך ש-
$$\sup_{z \in S} |g_n(z) - g(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
או: לכל $\varepsilon>0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל $z \in S$:
$$|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$$

דוגמה - $\{z^n\}$ מתכנסת במ"ש ב- $D_0(\frac{1}{2})$ אבל לא ב- $D_0(1)$.

הגדרה - $\{g_n\}$ מתכנס במ"ש מקומית על קבו' פתוחה G אם לכל $z \in G$
יש $\varepsilon>0$ כך ש- $\{g_n\}$ מתכנסת במ"ש ב- $D_z(\varepsilon) \subseteq G$

דוגמה - $\{z^n\}$ מתכנסת מקומית ב- $D_0(1)$

הגדרה - טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במ"ש מקומית על G אם כל f_n מוגדרת על G, והסכומים החלקיים $S_n(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ מתכנסים במ"ש (מקומית) על G.

קריטריון ויירשטראס (M-מבחן) - $f_n : S \to \mathbb{C}$, $M_n \in \mathbb{R}$ ו- $|f_n(z)| \leq M_n$ לכל $z \in S$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז $\sum f_n$ מתכנס במ"ש על S.

טורי חזקות - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

הגדרה - נאמר ש- $R \in [0,\infty]$ הוא רדיוס ההתכנסות של טור חזקות אמ"מ $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. נניח בה"כ מעכשיו כי $z_0 = 0$

משפט - יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. אזי:

1) הטור מתכנס בהחלט מקומית ב- $D_0(R)$
2) אם $|z|>R$ אז $\lim |a_n z^n| = \infty$
3) ב- $D_0(R)$ אם נגדיר $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, אז f הולומורפית
ו- $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

הוכחה ארוכה, להשלים יום אחד

תזכורת - אינטגרל

- $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b Re\,\varphi(t)\,dt + i\int_a^b Im\,\varphi(t)\,dt$$

- תכונות:
  - לינאריות
  - ניוטון לייבניץ
  - $\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt$

- אינטגרל מרוכב - $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה, גזירה ונגזרת רציפה למקוטעין, f מוגדרת על תמונת γ ורציפה

הגדרנו:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

- תכונות האינטגרל:
  - לינאריות $\int_\gamma c_1f_1(z)+c_2f_2(z)\,dz = c_1\int_\gamma f_1(z)dz + c_2\int_\gamma f_2(z)dz$
  - אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה חלקה C' למקוטעין, $a<c<b$ ו- $\gamma_1=\gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2=\gamma|_{[c,b]}$ אז:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

  - בהינתן עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, נגדיר $-\gamma$ כמסילה $-\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ע"י - $-\gamma(t)=\gamma(b+a-t)$

נקבל:

$$(-\gamma)'(t) = -\gamma'(b+a-t)$$

טענה - $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$

הוכחה - לפי הגדרה + החלפת משתנים

  - $\left|\int_\gamma f\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\,dt$

מסקנה - $\left|\int_\gamma f\right| \le \sup_t |f(\gamma(t))|\cdot Len(\gamma)$

$$Len(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

  - G קבוצה פתוחה, F הולומורפית ב-G, $\gamma\subset G$, ונניח ש- $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה מקיימת $F'(z)=f(z)$ (F קדומה של f ב-G).

אז:

$$\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(ניוטון לייבניץ)

סיבה - $\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

כלל שרשרת

ניוטון לייבניץ

דוגמאות - א - $\int_\gamma dz = \int_a^b 1\cdot\gamma'(t)dt = \gamma(b)-\gamma(a)$

ב - $\int_\gamma z\,dz = \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{1}{2}(\gamma^2(t))'dt = \frac{1}{2}[\gamma^2(b)-\gamma^2(a)]$

מסקנה - אם $F: G\to\mathbb{C}$ הולומורפית ו- $F'=f$ רציפה ו- γ מסילה סגורה $\gamma(a)=\gamma(b)$
אז $\int_\gamma f\,dz = 0$

דוגמאות - ג - $f(z)=\frac{1}{z}$, (מעגל נגד כיוון השעון) $\gamma(t)=e^{it}$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it}\cdot ie^{it} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

מסקנה - אין ל- $\frac{1}{z}$ קדומה ב- $D_0(1)$

* גם על מסילה ברדיוס קטן יותר $\gamma(t)=re^{it}$, האינטגרל ישאר $2\pi i$

מסקנה - $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ טור חזקות מתכנס ב- $D_0(R)$.
אז לכל מסילה סגורה $\gamma\subset D_0(R)$, $\int_\gamma f\,dz=0$

סיבה - נגדיר $F= a_0z+a_1\frac{z^2}{2}+a_2\frac{z^3}{3}\dots$.
לטור זה אותו רדיוס התכנסות R.
F הולומורפית ב- $D_0(R)$ ומתגזרה איבר איבר , $F'=f$

מסקנה - (מתבנה 4) אם $f_n\to f$ במ"ש על מסילה γ אז $\int_\gamma f_n\to\int_\gamma f$

סיבה - $\left|\int_\gamma f_n-\int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n-f)dz\right| \le \int_\gamma |f_n-f|dz \le \sup_{z\in\gamma}|f_n(z)-f(z)|\cdot Len(\gamma)$ $\xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$

רה-פרמטריזציה

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ חלקה C' למקוטעין.

$\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ היא רה-פרמטריזציה של γ אם קיימת $\beta:[a_1,b_1]\to[a,b]$
חח"ע ועל, עולה, וחלקה C' למקוטעין, ו- $\gamma_1=\gamma\circ\beta$

(γ ו- γ_1 בעלות אותה תמונה, ולכן מתארות אותו מסלול אך בקצב שונה)

טענה - $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$

סיבה -
$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\beta(t)))\gamma'(\beta(t))\beta'(t)dt = [s=\beta(t)] =$$
$$= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f\,dz$$

תרגיל - אורך עקומה אינו משתנה תחת רה-פרמטריזציה

משפט קושי

גם בפנים!

משפט - הלמה של Goursat

G קבוצה פתוחה. $f: G \to \mathbb{C}$ הולומורפית. T משולש שמוכל כולו ב-G. נסמן ב-γ את מסילת השפה של T נגד כיוון השעון.

אזי:

$$\int_\gamma f\,dz = 0$$

הוכחה - נסמן $I := \int_\gamma f\,dz$. צ"ל $I = 0$.

נבנה 4 משולשים $T_{0,j}$ $j=1,2,3,4$ ע"י סימון 3 נק' אמצע של צלעות T וחיבורן בקו ישר.

נקבל -

$$\int_{\partial T} f\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial T_{0,j}} f\,dz$$

כיוון שכל צלע פנימית שהוספנו, האינטגרל עליה בצג ימין פעם בסימן + ופעם בסימן -.

לכן יש j עבורו $\left|\int_{\partial T_{0,j}} f\right|$ מקסימלי כך ש- $\left|\int_{\partial T_{0,j}} f\,dz\right| \ge \frac{1}{4}|I|$

נסמן $T_1 = T_{0,j}$ ל-j המתאים.

נשים לב שמדימיון משולשים, $\frac{1}{2} Len(\partial T) = Len(\partial T_1)$

מ-T_1 נקח תת משולש T_2 באותו אופן, ונקבל $Len(\partial T_2) = \frac{1}{2} Len(\partial T_1)$ ו-

$$\left|\int_{\partial T_2} f\,dz\right| \ge \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |I|$$

נמשיך כך ונקבל סדרת משולשים $\{T_n\}$ המקיימת:

- $Len(T_n) = \frac{1}{2^n} Len(T_0)$
- $\left|\int_{\partial T_n} f\,dz\right| \ge \frac{|I|}{4^n}$
- $\{T_n\}$ מקוננות וקומפקטיות, ולכן יש $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$

f גזירה ב-z_0 במובן המרוכב, לכן ניתן לכתוב $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + E(z)$

כש- $E(z) := f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)$

נשים לב - (מגזירות)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{E(z)}{z - z_0} = 0$$

יהי T_n משולש סביב z_0. נחשב:

$$\int_{\partial T_n} f\,dz = \underbrace{\int_{\partial T_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)}_{\to 0} + \int_{\partial T_n} E(z)\,dz$$

לכן -

$$|I| \le 4^n \left|\int_{\partial T_n} E(z)\,dz\right|$$

נסמן $\varepsilon_n := \sup_{z \in \partial T_n} \left|\frac{E(z)}{z - z_0}\right|$ ואז $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

כמו כן - $|E(z)| \le \varepsilon_n \cdot |z - z_0| \le \varepsilon_n Len(\partial T_n) = \varepsilon_n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot Len(\partial T_0)$. $\forall z \in \partial T_n$

אז

$$|I| \le 4^n \cdot Len(T_n) \cdot \varepsilon_n \cdot Len(\partial T_n) = 4^n \cdot \frac{Len(\partial T_0)^2}{2^n \cdot 2^n} \cdot \varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

ונקבל $I = 0$.

<u>תזכורת</u>

- יהי G פתוחה, $F \in Hol(G)$, $\gamma \subset G$ מסילה.
נניח ש- $f: G \to \mathbb{C}$ מקיימת $F' = f$, f רציפה.
אז:

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- למת Goursat
$f: G \to \mathbb{C}$ הולומורפית, $T \subset G$ משולש.
אז

$$\int_{\partial T} f\,dz = 0$$

הגדרה - G תחום יקרא <u>תחום קמור</u> אם לכל $z_1, z_2 \in G$ הנקודות $tz_1 + (1-t)z_2 \in G$ $\forall t \in [0,1]$

למשל - $G = D_z(R)$

משפט קושי - יהי G תחום קמור, ו- $f: G \to \mathbb{C}$ הולומורפית.
אז לכל עקומה סגורה γ חלקה למקוטעין מתקיים

$$\int_\gamma f\,dz = 0$$

הערה - נוכיח בעצם שתחת תנאים אלו ל- f יש קדומה $F \in Hol(G)$ ב- G
($F' = f$)

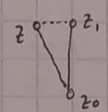
הוכחה - עבור $z_0, z_1 \in G$ נסמן ב- $[z_0, z_1]$ את הקו מביניהן:
$\{tz_0 + (1-t)z \ , \ t \in [0,1]\}$

נקבע $z_0 \in G$. נגדיר - $F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$

מ- z_0 ל- z $\to$ $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz$

נראה ש- F הולומורפית ב- G, ו- $F'(z) = f(z)$

תהא z_1 (שנשאיפה ל- z)



משולש! ←

מלמת Goursat נקבל

$$\underbrace{\int_{[z_0,z_1]} f(\xi)\,d\xi}_{F(z_1)} + \int_{[z_1,z]} f + \underbrace{\int_{[z,z_0]} f}_{-F(z)} = 0$$

לכן

$$F(z) - F(z_1) = \int_{[z_1,z]} f(\xi)\,d\xi$$

לכן

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z) = \frac{1}{z-z_1}\int_{[z_1,z]} (f(\xi) - f(z))\,d\xi$$

נשאיף $z_1 \to z$: נקבע $\varepsilon > 0$. היות ו- f רציפה, יש δ כך ש-

$$|\xi - z_1| < \delta \to |f(\xi) - f(z_1)| \le \varepsilon$$

לכן, אם $|z - z_1| < \delta$ אז:

$$\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z)\right| \underset{\text{ממשולש} \le \varepsilon}{\le} \left|\frac{\varepsilon(z-z_1)}{z-z_1}\right| = \varepsilon$$

לפיכך

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} = f(z)$$

כלומר f גזירה ב- $F'(z) = f(z)$.

$\square$

נוסחת קושי

משפט - נניח ש- $f: G \to \mathbb{C}$ הולומורפית, G תחום קשור, $\overline{D(r)} \subset G$

אז

$$\forall z_0 \in D(r) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi$$

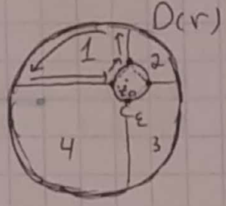
נגד כיוון השעון

הוכחה - יהי C_ε מעגל ברדיוס ε סביב z_0 כך ש- $C_\varepsilon \subset D(r)$

אז

$$(*) \qquad \int_{\partial D(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi$$

הסבר -



קיבלנו 4 תחומים קמורים. האינטגרל על כל אחד 0. וסכום האינטגרלים זה האינטגרל על $\partial D(r)$ ועל C_ε בכיוון השני.

הוכחה פורמלית - נקבע $z_0 \in D$, יהי C_ε המעגל $\{z \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$

נניח ש- ε קטן מספיק כך ש- $C_\varepsilon \in D$.

נוכיח את $(*)$.

נסמן 4 נקודות, צפון, דרום, מזרח, מערב על C_ε.

נחבר אותם בקווים ישרים ל- D כמתואר בציור.

נגדיר 4 מסילות $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. נקבל:

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots + \int_{\gamma_4} \dots =$$

$$\xrightarrow{\text{מתכונות האינטגרל}} = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi - \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi$$

כמו כן ממשפט קושי $= 0$

למה?

צריך למצוא תחום קשור G_i כך ש- $\gamma_i \in G_i$ ו- $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ הולומורפית ב- G_i.

למשל, γ_1 מוכלת בתחום קשור בו $\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ הולומורפית.

התחום הוא חצי מישור חיתוך D'

(D' מעגל מעט גדול יותר מ- D עדיין בתוך G).

זה מוכיח את $(*)$.

חישבנו $\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi = 2\pi i$

לכן $\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{\xi - z_0}\, d\xi = 2\pi i f(z_0)$

אז $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}\, d\xi$

יודעים ש- $\lim_{\xi \to z_0} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} = f'(z_0)$

בפרט - $M_\varepsilon = \sup_{\xi \in C_\varepsilon} \left| \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} \right| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} |f'(z_0)|$

לכן מ- $(*)$

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi - f(z_0) \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{len(C_\varepsilon)} \cdot M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

(מצד שמאל לא מופיע ε, לכן הוא שווה 0.)

$\square$

משפט הערך הממוצע

פרשנות של משפט קושי.

נניח ש- $D_{z_0}(r)$ מוכל בתחום בו f הולומורפית.
נוסחאת קושי:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi \quad (=)$$

כאשר המסילה היא $t\in[0,2\pi]$,
$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$$
$$\gamma'(t) = re^{it}\cdot i$$

לפי הגדרה →
$$(=)\ \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{re^{it}}\, re^{it}\cdot i\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, dt$$

מטרה- אם f הולומורפית, גם f' הולומורפית ול-f יש פיתוח כטור טיילור.

אינטגרל קושי (גרסה ברורה יותר בעמוד הבא)

למה - יהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה חלקה ח' למקוטעין (לאו דווקא סגורה)
ו- $\phi:\gamma\to\mathbb{C}$ רציפה
נגדיר את האינטגרל קושי של ϕ כפונקציה

$$F(z) := \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$$

אז F הולומורפית ב- $\mathbb{C}\setminus\gamma$, ובנוסף, גזירה מכל סדר ו-:

$$F^{(n)}(z) = n!\int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$$

יתר על כן, אפשר לפתח את F כטור חזקות סביב כל $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$
ברדיוס התכנסות $\delta = dist(z_0,\gamma)$

הערה - נוסחאת קושי מראה שאם ϕ הולומורפית ו-γ מעגל נגד כיוון השעון
כש-ϕ הולומורפית בתוך המעגל ובמעטפתו אז $F(z) = 2\pi i\cdot\phi(z)$
ומהלמה נובע ש-ϕ גזירה מכל סדר, ויש לה טור טיילור.

הוכחה- נבחר $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ ונסמן $\delta = dist(z_0,\gamma)$
ניקח z שמקיים $|z_0 - z|<\delta$, קבוע.
אז לכל $\xi\in\gamma$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

הטור מתכנס על כל $(\xi\in\gamma)$

תזכורת

הגדרה - $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש על $S \subset \mathbb{C}$ לפי f אם $\sup_{z \in S} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

- אם S היא עקומה γ ו- $f_n \to f$ במ"ש על γ אז $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$

טורים - $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ מתכנס במ"ש על S ל- $G(z)$ אמ"מ $\sup_{z \in S} |G(z) - \sum_{n=0}^{N} g_n(z)| \xrightarrow{N \to \infty} 0$

אם S עקומה γ, אז

$$\sum_{n=0}^{N} \int_\gamma g_n(z)\,dz \longrightarrow \int_\gamma G\,dz$$

טורי חזקות - נתון $z_0 \in \mathbb{C}$ ו- $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. מגדירים $\frac{1}{R} := \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$

נסתכל בטור

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

משפט I - 1) לכל $z \in D_{z_0}(R)$ הטור מתכנס, ובנוסף מתכנס במ"ש מקומית ובהחלט

2) אם $R < |z - z_0|$, אז הטור אינו מתכנס ב- z, ובפרט $\overline{\lim} |a_n (z - z_0)^n| = \infty$

3) ב- $D_{z_0}(R)$, f הולומורפית ו-

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z - z_0)^{n-1}$$

מסקנה - $\forall n.\ f^{(n)} \in Hol(D_{z_0}(R))$ ו- $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

דוגמה - $z \in B_0(\alpha)$, $\alpha < 1$.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

מתכנס במ"ש ב- $B_0(z)$

סיבה -

$$\left| \frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{N} z^n \right| = \left| \sum_{n=N+1} z^n \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha^n = \alpha^{N+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \alpha^{N+1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

אינטגרל קושי

γ מסילה חלקה למקוטעין, $\phi : \gamma \to \mathbb{C}$ רציפה.

נגדיר:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma .\ F(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

למה - F הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \gamma$. בנוסף, היא גזירה מכל סדר, ו-

$$F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

ובנוסף, ניתן להציג את F כטור חזקות $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ בכדור $D_{z_0}(r)$ כש- $r = dist(\gamma, z_0) = \inf_{\xi \in \gamma} |\xi - z_0|$

(הטור מתכנס במ"ש מקומית)

ו-

$$a_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

משפט II - f פונקציה הולומורפית ב- G. נניח ש- $\overline{D_{z_0}(r)} \subset G$.

אז יש פיתוח ל- f בטור חזקות מהצורה:

$$\forall z \in D_{z_0}(r) .\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

יתר על כן, זהו התכנסות במ"ש מקומית ב- $D_{z_0}(r)$.

הוכחת המסקנה מהלמה - מנוסחאת קושי, לכל $z \in D_0(r)$: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{\xi - r} d\xi$

ואז הכל נובע מהלמה.

הוכחת הלמה

מספיק להוכיח את ההצגה כטור חזקות, ומשפט I ייתן את השאר.

נקבע $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ ונסמן $\delta = dist(z_0,\gamma)$.

נקבע $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ ו- $\alpha = |z-z_0|$ כך ש- $\alpha<\delta$

לכל $\xi \in \gamma$ מתקיים:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} =$$

כיוון ש- $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < \frac{\alpha}{\delta} < 1$, $\forall \xi\in\gamma$ מתקיים:

$$= \frac{1}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n \longrightarrow$$

בו התכנסות במ"ש על $\xi\in\gamma$ (ממבחן M- בוחן של ויירשטראס)

לכן - $\sup_{\xi\in\gamma}\left|\frac{1}{\xi-z} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0$

לכן - $\sup_{\xi\in\gamma}\left|\frac{\phi(\xi)}{\xi-z} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\phi(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0$

(כי $\phi(\xi)$ רציפה ולכן חסומה על γ)

אז $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ מתכנס במ"ש על $\xi\in\gamma$ ל- $\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}$

לכן - $F(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{\xi-z}\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\int_\gamma \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi}_{a_n}$

בו התכנסות נקודתית לכל $z\in D_{z_0}(\delta)$.

לכן רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n\cdot a_n$ הוא $\ge\delta$

(ממשפט I)

כמו כן, $a_n := \int \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}$

דוגמה - ① $f = e^z$. נפתח סביב $z_0=0$. $f^{(n)}(0)=1$.

לכן:

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

(מתכנס לכל $z\in\mathbb{C}$)

② $f = \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $z_0=0$

$f' = \frac{1}{2i}(ie^{iz}+ie^{-iz})|_{z=0} = 1$

$f'' = \frac{1}{2i}(-e^{iz}+e^{-iz})|_{z=0} = 0$

$\to f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ זוגי} \\ (-1)^k & n=2k+1 \end{cases}$

ו- f הולומורפית בכל $\mathbb{C}$

לכן:

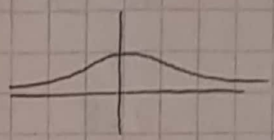
$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

כלומר - $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

באופן דומה - $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

דוגמה - ③ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$f(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\quad,\quad x\in(-1,1)$$



למה לא מתכנסת ב- 1? כי הפונ' המרוכבת לא מוגדרת ב- $z=\pm i$.
היא הולומורפית פרט ל-2 הנקודות האלה. לכן אין התכנסות בדיסק גדול יותר (סביב 0).
אם נחפש התכנסות סביב כל נקודה אחרת, עדיין רדיוס ההתכנסות יהיה חסום ע"י 2 הנקודות האלה.

④ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה אינסוף פעמים

עם זאת, $f^{(n)}(0)=0$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\neq f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

סיבה - $f(z)=e^{-1/z^2}$ אינה מוגדרת ב- $z=0$, לכן אין אפשרות להשלימה לפונ' הולומורפית בסביבת 0, לכן אין פיתוח טיילור סביב 0.

משפט Morera - (פתוחה)
נניח ש- $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה וכי לכל משולש $T\subset G$, $\int_{\partial T} f\,dz=0$
אז f הולומורפית ב- G.
(זה הכיוון השני של למת Goursat).

הוכחה - בה"כ נניח ש- G היא דיסק.
הוכחנו שתחת תנאי המשפט [המשפט שאחרי למת Goursat] יש ל- f פונ' קדומה הולומורפית F כך ש- $F'=f$, וסיימנו כי נגזרת של פונ' הולומורפית גזירה בעצמה.

מסקנה - $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה, הולומורפית ב- $G\setminus\{z_0\}$. אז היא הולומורפית בכל G.

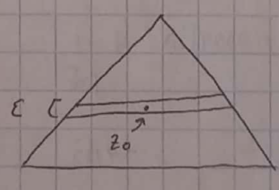
~~הוכחה~~ - נבדוק את תנאי ~~[illegible]~~ משפט Morera.
יהי $T\subset G$ משולש, צ"ל $\int_{\partial T} f\,dz=0$.

אם $z_0\notin T$, נובע מלמת Goursat. אם $z_0\in T$:
ניקח $\left|\int_{\partial B_{z_0}(\varepsilon)} f\right|\le \sup f\cdot len(\partial B_{z_0}(\varepsilon))\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$

וממשפט קושי! $\int_{\partial T} f-\int_{\partial B_{z_0}(\varepsilon)} f=0$ (כי זה סכום של מסילות סגורות)

תרגיל - I קטע, $I\subset G$ $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה, הולומורפית ב- $G\setminus I$
אז היא הולומורפית בכל G.

* הוכחה נוספת בשרטוט למסקנה:



תזכורת

אם $f \in Hol(G)$, $z_0 \in G$, $0 < r < dist(z, \mathbb{C} \setminus G)$.
אם C_r הוא המעגל נגד כיוון השעון ברדיוס r סביב z_0 ,
אז נוסחאת קושי:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

ו- $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad (*)$$

וניתן לפתח את f לטור טיילור סביב z_0 ברדיוס r:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \longrightarrow$$ מתכנס במ"ש על הדיסק הנ"ל

משפט Morera - $f: G \to \mathbb{C}$, אם לכל משולש $T \subset G$ מתקיים $\int_{\partial T} f dz = 0$
אז f הולומורפית.

משפט הערכה של קושי

אם f הולומורפית ב- $\{z : |z - z_0| < R\}$,
אז לכל $r < R$ ולכל n טבעי:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

סיבה - מ- $(*)$:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right|$$

מעגל בכיוון חיובי סביב z_0 ברדיוס r

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z_0)^{n+1}|} |d\xi| \leq \frac{n!}{2\pi} \max_{z \in C_r} |f(\xi)| \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \underbrace{len(C_r)}_{2\pi r} =$$

$$= \frac{n! \max_{z \in C_r} |f(z)|}{r^n} .$$

משפט Liouville

אם $f \in Hol(\mathbb{C})$ ו- f חסומה, אז f קבועה.

הוכחה - נניח ש- $|f(z)| \leq M$ לכל $z \in \mathbb{C}$, ממשפט ההערכה:
$\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall r > 0$. $|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \longrightarrow f' \equiv 0 \longrightarrow f$ קבועה

הגדרה - $f \in Hol(\mathbb{C})$ נקראת שלמה.

המשפט היסודי של האלגברה

כל פולינום עם מקדמים ב-$\mathbb{C}$ ניתן לפרק לגורמים לינאריים.

הוכחה - מספיק להראות שלכל פולינום מדרגה ≥ 1 יש שורש ← ואז אינדוקציה.

$$P(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

נניח בשלילה של-P אין שורשים. כלומר $\forall z.\ P(z)\neq 0$.
נגדיר אז את $f=\frac{1}{P}$ ← פי' שלמה.

כמובן $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\lim_{|z|\to\infty}|a_N z^N|\left|\left(1+\frac{a_{N-1}}{a_N z}+\frac{a_{N-1}}{a_N z^2}+\dots+\frac{a_0}{a_N z^N}\right)\right|=\infty$

↳ כלומר, יש רדיוס R כך ש- $|P(z)|\geq 1$ לכל $|z|>R$

מכאן ש- f חסומה, ולכן ממשפט Liouville, f קבועה. סתירה לכך שדרגת $P\geq 1$.

משפטי יחידות

משפט 1) - G תחום, $f\in Hol(G)$, $a\in G$ בה $\forall n=0,1,2\dots\ f^{(n)}(a)=0$
אז $f\equiv 0$

הוכחה - פי' הולומורפית ניתנת לפיתוח טיילור בסביבת a:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

כלומר $f(z)=0$ לכל $z\in B_a(\varepsilon)$ עבור $\varepsilon>0$ כלשהו.
נגדיר-

$$U=\{a\in G\mid f^{(n)}(a)=0\ \ \forall n=1,2,3\dots\}$$

הוכחנו למעשה ש- U פתוחה. אבל גם:

$G\setminus U=\{z\mid f^{(n)}(z)\neq 0 \text{ עבור n כלשהו}\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{z\mid f^{(n)}(z)\neq 0\}$ ← פתוחות (כתמונה הפוכה של משהו)

אבל $f^{(n)}:G\to\mathbb{C}$ גזירה ובפרט רציפה, ולכן $G\setminus U$ גם פתוחה.
מהנתון, U אינה ריקה לכן $U=G$.

הגדרה - G תחום, $f\in Hol(G)$, $f\not\equiv 0$. נק' $a\in G$ בה $f(a)=0$
נקראת אפס של f והריבוי של a ב- f הוא:

$$m_f(a)=\min\{n\geq 1\mid f^{(n)}(a)\neq 0\}$$

מהמשפט הקודם: $m_f(a)<\infty$

טענה - אם a אפס של $f\in Hol(G)$ אז $f(z)=(z-a)^m g(z)$ כש- $g\in Hol(G)$ ו- $g(a)\neq 0$
↗ $m=m_f(a)$

הוכחה - נגדיר $g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{(z-a)^m} & z\neq a\\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!} & z=a\end{cases}$ וממשיכים מכאן...

משפט יחידות 2 - G תחום, $f\in Hol(G)$. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq G$, $z_n\xrightarrow{n\to\infty}a\in G$ ולכל n, $z_n\neq a$.
אם לכל $n\in\mathbb{N}$, $f(z_n)=0$ אז $f\equiv 0$.

הוכחה - נניח בשלילה ש- $f\not\equiv 0$. מרציפות $f(a)=0$.
יהי m הריבוי של a. לפי הטענה, $f(z)=(z-a)^m g(z)$, $g(a)\neq 0$, $g\in Hol(G)$.
מרציפות g, יש סביבה מנוקבת של a בה $g(z)\neq 0$, $\forall z\in B_0(\varepsilon)$
ולכן בסביבה זו, $f(z)=(z-a)^m g(z)\neq 0$. סתירה לכך ש- $f(z_n)=0$.

משפט ויירשטראס - G פתוחה, $f_n\in Hol(G)$, $n=1,2,\ldots$, $f_n\xrightarrow{n\to\infty}f$ במ"ש מקומית ב-G,
אז $f\in Hol(G)$, ולכל $0\leq j$, $f_n^{(j)}\to f^{(j)}$ במ"ש מקומית ב-G
(בממשיים - במ"ש אפילו לא גורר גזירות!)

הוכחה - ממשפט קושי, לכל $T\subset G$, $\int_{\partial T} f_n=0$, לכן $\int_{\partial T} f_n\to\int_{\partial T} f$
וממשפט מוררה, f הולומורפית.

נקח $z\in G$, כיוון ש- $f_n\to f$ במ"ש מקומית, יש $\delta>0$ כך ש:
$$\sup_{|\xi-z|<\delta}|f_n(\xi)-f(\xi)|\to 0$$

ממשפט ההערכה של קושי: אם g הולומורפית, אז לכל $j=1,2,\ldots$:
$$|g^{(j)}(z_0)|\leq\frac{j!}{r^j}\max_{|z-z_0|=r}|g(z)|$$

נפעיל זאת על $g=f_n-f$, $r=\frac{\delta}{2}$.

לכן לכל w המקיים $|w-z|\leq\frac{\delta}{2}$, מתקיים:
$$|f_n^{(j)}(w)-f^{(j)}(w)|\leq\frac{j!}{(\delta/2)^j}\max_{|q-w|=\frac{\delta}{2}}|f_n(q)-f(q)|\leq\frac{j!}{(\delta/2)^j}\sup_{|q-z|<\delta}|f_n(q)-f(q)|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

לכן $f_n^{(j)}\to f^{(j)}$ במ"ש מקומית.

עיקרון המקסימום - G תחום, $f\in Hol(G)$, אם $|f|$ מקבלת מקסימום מקומי ב- $z_0\in G$,
אז f קבועה.

הוכחה - נסמן $\omega: G\to\mathbb{R}$, $\omega(z)=|f(z)|$
ממשפט הערך הממוצע: ל- $r>0$ קטן מספיק, $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt$
לכן:
$$\omega(z_0)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(z_0+re^{it})dt$$

נניח כי $z_0\in G$ נק' מקסימום מקומית של ω. נסמן $m=|f(z_0)|$,
נסמן $V=\{z\in D\mid u(z)<m\}$ קב' פתוחה ו- $U=\{z\mid u(z)=m\}$.

U לא ריקה, $z_0\in U$, נוכיח ש- U פתוחה. נקח ε_0 קטן מרדיוס D.
אז:
$$m=\omega(z_0)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(z_0+\varepsilon e^{it})dt\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots dt=m$$

לכן כל ה- $\leq$ הם $=$, מרציפות ω נקבל שלכל ε קטן מרדיוס D, ולכל $t\in[0,2\pi]$,
$\omega(z+\varepsilon e^{it})=m$.

לכן U קבוצה פתוחה וסגורה ומקשירות D נקבל $D=U$. לכן ω קבועה על D.
כלומר $|f|$ קבועה על D, ולכן ממשפט קושי רימן, f קבועה על D.
כיוון ש-G תחום, ממשפט יחידות 2 נקבל ש- f קבועה בכל התחום.

הלמה של שוורץ - תהי $f: D_0(1) \to D_0(1)$ הולומורפית, $f(0)=0$:

1) $|f(z)| \le |z| \quad \forall z \in D_0(1)$.

2) $|f'(0)| \le 1$

3) אם $|f'(0)|=1$, או אם קיים $z_0 \in D_0(1)$ בו $|f(z_0)| = |z_0|$,

אז יש $\lambda \in \mathbb{C}$ עם $|\lambda|=1$ כך ש- $f(z) = \lambda z$ לכל $z \in D_0(1)$

הוכחות - נגדיר $g: D_0(1) \to \mathbb{C}$,
$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z=0 \end{cases}.$$

אז כמו קודם, g הולומורפית.

נקח $z \in D_0(1)$, ויהי $r<1$ מספר כך ש- $|z|<r$, אז מעיקרון המקסימום:

$$|g(z)| \le \max_{|\xi|=r} |g(\xi)| = \frac{1}{r} \max_{|\xi|=r} |f(\xi)| \le \frac{1}{r}$$

נשאיף $r \to 1$ ונקבל כי $|g(z)| \le 1$, לכן $|f(z)| \le |z|$, $|f'(0)| \le 1$

אם מתקיים אחד השיוויונים מ-3, אז נובע ש- $z_0 \in D_0(1)$ כך ש- $|g(z_0)|=1$, מעיקרון המקסימום, g קבועה ו- $|g|=1$, לכן יש λ כזה.

(חסר שפטוט הסבר שלא הבנתי)

טורי לורן

דוגמה - $f(z)=\frac{1}{1-z}$ הולומורפית ב- $|z|<1$

יש לה פיתוח טיילור $f(z)=1+z+z^2+\dots$, $|z|<1$

מה קורה $|z|>1$?

$|z|>1$, $\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\dots$

דוגמה - $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

אם $1<|z|<2$:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(z)^n$$

אז פיתוח לורן בטבעת $1<|z|<2$ יהיה

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n \quad , \quad c_n=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}} & n\geq0\\ -1 & n<0\end{cases}$$

מטרה - אם f הולומורפית בדיסק מנוקב $D_{z_0}(r)\setminus z_0$ אז אפשר לכתוב:

$$f(z)=\dots\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2\dots$$

דוגמאות - 1) $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$, $\oint f=2\pi i$

2) $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^2}$, $\oint f=0$

סיבה - יש קדומה $F=\frac{-1}{z-z_0}$, $F'=f$, ואז מהמשפט היסודי של החדו"א...

אנחנו נראה - $\oint f\,dz=a_{-1}\cdot2\pi i$

הגדרה - טור לורן סביב $z_0\in\mathbb{C}$ נקבע ע"י סדרה $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\subseteq\mathbb{C}$ והוא $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

נאמר שטור זה מתכנס ב- z אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ מתכנס וגם $\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$ מתכנס. אחרת הטור מתבדר.

נגדיר - $R_+=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}}$, $R_-=\overline{\lim}|a_{-n}|^{1/n}$

אם $R_+>R_-$ אז נקרא לטבעת $A=A_{z_0}(R_-,R_+)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,R_-<|z-z_0|<R_+\}$ (annulus) : טבעת ההתכנסות.

משפט לורן I - נתון טור לורן $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סביב $z_0 \in \mathbb{C}$.

נסמן $\Sigma_+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ו- $\Sigma_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$, $\Sigma = \Sigma_+ + \Sigma_-$

1) הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתבדר ב- $\mathbb{C} \setminus \overline{A}$

2) אם $R_+ > 0$, הטור Σ_+ מתכנס במ"ש מקומית, בהחלט, בדיסק $D_{z_0}(R_+)$ (כבר הוכחנו)

3) אם $R_- \geq 0$, הטור Σ_- מתכנס במ"ש מקומית, בהחלט, ב- $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{z_0}(R_-)}$

4) אם $R_- < R_+$ הטור Σ מתכנס במ"ש מקומית ובהחלט ב- A, סכומו פונ' הולומורפית, ובנוסף

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall R_- < r < R_+$$

נגד כיוון השעון

הוכחה - 1) ברור שמתבדר כש- $|z-z_0| > R_+$

נתבונן בטור טיילור $(*) \quad h(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n$

רדיוס ההתכנסות הוא

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}} = \frac{1}{R_-}$$

לכן אם $|\xi| < \frac{1}{R_-}$, הטור $(*)$ מתבדר.

נציב $\xi = \frac{1}{z-z_0}$, ונקבל שאם $|z-z_0| < R_-$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$ מתבדר.

3) הטור $(*)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש מקומית ב- $D_{z_0}(\frac{1}{R_-})$

נציב שוב $\xi = \frac{1}{z-z_0}$ ונקבל שיש התכנסות בהחלט כש: $|z-z_0| > R_-$

$\{|z-z_0| > R_-\} \longleftrightarrow \{\frac{1}{R_-} > |\xi|\}$

כלומר התכנסות בהחלט ב- $\mathbb{C} \setminus D_{z_0}(R_-)$

נגדיר $g(z) = \frac{1}{z-z_0}$ רציפה בתחום $G = \{z \mid |z-z_0| > R_-\}$

g מעבירה את G ל- $D_{z_0}(\frac{1}{R_-}) \setminus \{0\}$

יהי $K \subset G$ קומפקטית. צ"ל ש- Σ_- מתכנס במ"ש ב- K, מאחר

ו- $g(K)$ קומפקטית הטור $(*)$ מתכנס במ"ש ב- $g(K)$, כלומר:

$$\sup_{\xi \in g(K)} \left| h(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_{-n} \xi^n \right| \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

נסמן $q(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$

אבל

$$\sup_{z \in K} \left| q(z) - \sum_{n=1}^{N} a_{-n} (z-z_0)^{-n} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\xi \in g(K)} \left| h(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_{-n} \xi^n \right|$$

לכן Σ_- מתכנס במ"ש מקומית ב- $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{z_0}(R_-)}$.

4) הטורים Σ_+, Σ_- מתכנסים לפונקציה הולומורפית (תרגיל)

סכומם לפיכך הוא פונ' הולומורפית ב- A.

נסמנה ב- f: $\forall z \in A. \ f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

יהי $k \in \mathbb{Z}$, $R_- < r < R_+$.

מתקיים:

$$(**) \quad \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1}$$

ב- A הפונקציה $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ רציפה (וחסומה) אז למעשה $(**)$

זו התכנסות במ"ש מקומית.

לכן ניתן לעשות אינטגרציה איבר איבר:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\partial D_0(r)} (z-z_0)^{n-k-1}$$

אם $n-k-1 \neq -1$, האינטגרל מתאפס כי יש פונ' קדומה ב- $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

לכן עבור $n=k$ נקבל $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0(r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{a_k}{2\pi i} \cdot 2\pi i = a_k$

תזכורת

טור לורן - $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$R_- = \overline{\lim_{n\to-\infty}} |a_n|^{1/n}$, $R_+ = \dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}}$

משפט- אם $R_- < R_+$ הטור מתכנס במ"ש מקומית בטבעת $A(R_-, R_+)$ ובהחלט, והטור מתכנס לפונ' הולומורפית בטבעת, ו-

$\forall R_1 < r < R_2 .\ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

משפט לורן II - תהי $f \in Hol(A_{z_0}(a,b))$ עבור $0 \le a < b$.
אז יש פיתוח לורן:

$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

וזו התכנסות במ"ש מקומית ב-A ובהחלט, וכמובן

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

למה ה' -_. $f \in Hol(A_{z_0}(a,b))$. $a<r<b$, C_r המעגל $|z_0 - z| = r$ נגד כיוון השעון. אז הפונקציה:

$I(r) = \int_{C_r} f d(z)$ קבועה

הוכחה - $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$I(r) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) i re^{it} dt$

תרגיל- אם $h : [r_1, r_2] \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{C}$
כאשר h רציפה, ~~[illegible]~~ גזירה במשתנה הראשון, ונגזרתו רציפה,
אז:

$\frac{\partial}{\partial r} \int_{t_1}^{t_2} h(r,t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial r} h(r,t) dt$

אצלינו $h(r,t) = f(z_0 + re^{it}) i re^{it}$. ~~[illegible]~~ $r \in [a,b]$, $t \in [0, 2\pi]$
מהתרגיל:

$\frac{\partial I}{\partial r} = \int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{it}) \cdot e^{it} \cdot i r e^{it} + i e^{it} f(z_0 + re^{it}) dt =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(f(z_0 + re^{it}) e^{it} \right) dt \overset{N-L}{=} 0$ ← לבדוק ולהאמין

לכן I קבועה.

משמעות במילים: אם f הולומורפית בטבעת האינטגרל של פני כל מעגל בטבעת (לא משנה מה הרדיוס) קבוע.

למה ב' - $f\in H_0(A_{z_0}(a,b))$, $0\le a<b$,

$C_r = \{|z_0-z|=r\}$ נגד כיוון השעון.

לכל w המקיים $a<r_1<|w-z_0|<r_2<b$ מתקיים:

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)}{z-w}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-w}dz$$

הוכחה - נקבע w ונגדיר

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z\neq w\\ f'(w) & z=w\end{cases}$$

g הולומורפית ב-$A_{z_0}(a,b)\setminus\{w\}$ ורציפה ב-w, לכן ~~הולומורפית~~ הולומורפית בכל $A_{z_0}(a,b)$.

אז מלמה א': $\int_{C_{r_1}} g=\int_{C_{r_2}} g$

כלומר:

$$0=\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz-\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz$$

$$=\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)}{z-w}dz-\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-w}dz-f(w)\underbrace{\int_{C_{r_2}}\frac{1}{z-w}dz}_{2\pi i\text{ מנוסחאת קושי}}+f(w)\underbrace{\int_{C_{r_1}}\frac{1}{z-w}dz}_{0\text{ ממשפט קושי}}$$

נעביר אגפים, נחלק ב-$2\pi i$, וסיימנו.

הוכחת משפט לורן II

יהי $a<r<b$ ונגדיר $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$

(לא תלוי בבחירת r מלמה א')

~~[illegible]~~ נראה ש-

$$\forall z\in A.\quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ומספיק להוכיח זאת, השאר נובע ממשפט לורן I.

נקבע $z\in A$ ויהי $r_1<r_2$ מספרים כך ש- $a<r_1<|z-z_0|<r_2<b$

מלמה ב:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$

אם $\xi\in C_{r_2}$, אז $\frac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|}=\frac{|z-z_0|}{r_2}<1$, לכן

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

וההתכנסות במ"ש לכל $\xi\in C_{r_2}$.

המשך בעמוד הבא.

המשך הוכחה:

נעשה אינטגרציה איבר איבר ונקבל כי

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

נעשה אותו דבר לאינטגרל על פני $\xi \in C_{r_1}$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{-f(\xi)}{z-z_0}\cdot \frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = -\frac{f(\xi)}{z-z_0}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n =$$

$$= -f(\xi)\sum_{n=0}^\infty \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}} f(\xi)$$

אינטגרציה איבר איבר -

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\, d\xi = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k$$

ומלמה ב' סיימנו.

נק' סינגולריות של פונקציות הולומורפיות

הגדרה - $D^*_{z_0}(r)$ את הקבוצה $\{0<|z-z_0|<r\} = D_{z_0}(r)\setminus\{z_0\}$
(הדיסק המנוקב סביב z_0 ברדיוס r)

נאמר ש- z_0 נק' סינגולרית מבודדת של f אם f הולומורפית ב- $D^*_{z_0}(r)$ עבור r כלשהו.

נאמר ש- z_0 נק' סינג' סליקה אם יש המשכה הולומורפית ל- f ב- $D_{z_0}(r)$.

משפט ההמשכה של רימן - $f\in Hol(D^*_{z_0}(r))$.
z_0 סליקה $\Longleftrightarrow$ f חסומה ב- $D^*_{z_0}(\delta)$ עבור $0<\delta<r$ כלשהו

הוכחה - אם z_0 סליקה, אז f רציפה ב- $\overline{D_{z_0}(\delta)}$ $\forall \delta<r$,
ובפרט חסומה.

מצד שני, נניח $|f|$ חסומה ע"י M ב- $D^*_{z_0}(\delta)$.
יש פיתוח לורן:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^\infty a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z\in D^*_{z_0}(\delta)$$

כאשר $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi$, $\forall\varepsilon<\delta$

אם $n<0$, נוכיח ש- $a_n=0$, כי:

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \underbrace{2\pi\varepsilon}_{len(C_\varepsilon)} \cdot \frac{M}{\varepsilon^{n+1}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

לסיכום, ל- f יש פיתוח טיילור!
כלומר היא הולומורפית ב- $D_{z_0}(\delta)$ וניתן לשים $f(z_0)=a_0$

מסקנה - z_0 סליקה $\longleftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$ קיים וסופי.

תהא $f\in Hol(D^*_{z_0}(r))$, נפתח טור לורן

$$f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$$

יש 3 מקרים:

1) $\forall n<0$, $a_n=0$ $\longrightarrow$ z_0 סליקה

2) $\exists N\ge1$ ו- $\forall n\le N$. $a_n=0$ $\longrightarrow$ z_0 הי"א קוטב מסדר N (כש $a_{-N}\neq 0$)

3) $a_n\neq0$ עבור אינסוף n-ים שליליים $\longrightarrow$ z_0 סינגולרית עיקרית

דוגמאות

1) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, $z_0=0$ $\longrightarrow$ z_0 סליקה

2) $f(z)=e^{1/z}$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}$ $\longrightarrow$ 0 סינגולריות עיקרית

קטבים

נניח של- f קוטב ב- z_0 מסדר m:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\dots$$

נביט ב- $g(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\dots$

אז $g(z)=(z-z_0)^m f(z)$ ו- $g(z_0)\neq0$ והולומורפית ב- $D_{z_0}(r)$

מצד שני, אם התחלנו מ- g הולומורפית ו- $g(z_0)\neq0$ אז ל- $\frac{g(z_0)}{(z-z_0)^m}$ תהי"ה בו יש קוטב מסדר m.

מסקנה - ל- f קוטב מסדר m ב- z_0 $\leftrightarrow$ קיימת g הולומורפית ב- $D_{z_0}(r)$, ו- $g(z_0)\neq0$

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}\ .\ \forall z\in D^*_{z_0}(r)$$

תזכורת - אם ל- f אפס ב- z_0 מריבוי m, $f(z)=g(z)(z-z_0)^m$

טענה - 1) אם ל- f יש אפס מריבוי m ב- z_0 $\longrightarrow$ ל- $\frac{1}{f}$ יש קוטב מסדר m ב- z_0

2) אם ל- f קוטב מסדר m ב- z_0, אז ל- $1/f$ יהי"ה אפס מריבוי m.

הוכחה - (1) מטענה קודמת $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$

g הולומורפית ב- $D_{z_0}(r)$ ו- $g(z_0)\neq0$.

יש $\varepsilon>0$ כך ש- $g(z)\neq0$ $\forall z.\ D_{z_0}(\varepsilon)$

לכן:

$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{g(z)}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^m}$ $\longrightarrow$ הולומורפיות ב- $D_{z_0}(\varepsilon)$

לכן ל- $\frac{1}{g}$ יש פיתוח טיילור ב- $D_{z_0}(\varepsilon)$ והמקדם הראשון $\neq0$

לכן ל- $\frac{1}{f}$ יש פיתוח לורן שהמקדם הראשון שאינו 0 הוא ה- $(-m)$'.

משפט - $f\in Hol(D^*_{z_0}(r))$ אז z_0 קוטב ל- f אמ"מ $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

יתר על כן, סדר הקוטב m הוא המספר המינימלי הטבעי המקיים

$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^m\cdot|f(z)|$ קיים וסופי

הוכחה - נניח ש- z_0 קוטב מסדר m, אז מהמסקנה:

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\lim_{z\to z_0}\frac{|g(z)|}{|z-z_0|^m}=\infty$$

בנוסף, לכל $l>0$ טבעי:

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^l\cdot|f(z)|=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{|g(z)|}{(z-z_0)^{m-l}}=\begin{cases}\infty & l<m\\ |g(z_0)| & l=m\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

כיוון שני - נניח $\lim_{z\to z_0}|f|=\infty$

אזי יש ε כך ש- $|f(z)|\geq 1$, $\forall z\in D^*_{z_0}(\varepsilon)$

נביט ב- $h(z)=\frac{1}{f(z)}$ הולומורפית ב- $D^*_{z_0}(\varepsilon)$ וחסומה ע"י
דיסק מנוקב זה. לכן z_0 נקודה סליקה ב- h.
אז הרחבנו שוב ל- $h:D^*_{z_0}(\varepsilon)\to\mathbb{C}$ המשכה הולומורפית.

$$\lim_{z\to z_0}|h(z)|=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{|f(z)|}=0$$

כלומר $h(z_0)=0$

לכן z_0 הוא אפס מבודד של h. נסמן ב- m את הריבוי שלו
לכן מהטענה, ל- f יש קוטב מסדר m.

הגדרה - אם f הולומורפית בתחום G פרט לנק' סינגולריות מבודדות, אז נאמר ש- f מרומורפית כל עוד נקודות אלו סליקות או קטבים.

משפט Cesaroti-Weierstrass

$f\in Hol(D^*_{z_0}(r))$ ו- z_0 סינגולריה עיקרית, אז $f(D^*_{z_0}(r))$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.
כלומר, לכל $w\in\mathbb{C}$ יש סדרה $\{z_n\}\subseteq D^*_{z_0}(r)$ כך ש- $z_n\to z_0$ ו- $f(z_n)\to w$.

הוכחה - יהי $w\in\mathbb{C}$ ונניח שאין כזו סדרה, אז יש $\varepsilon>0$ כך ש:

$$\forall z\in D^*_{z_0}(\varepsilon).\ |f(z)-w|<\varepsilon$$

אז $h:=\frac{1}{f(z)-w}$ הולומורפית ב- $D^*_{z_0}(\varepsilon)$ וחסומה ע"י $\frac{1}{\varepsilon}$.
לכן z_0 סליקה עבור h.
אבל $h\not\equiv 0$ לכן ל- $\frac{1}{h}$ יש קוטב או נק' סליקה ב- z_0:

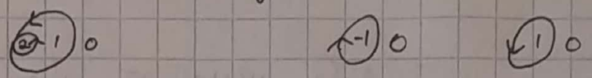
$\frac{1}{h}=f(z)-w \longrightarrow f$ יש קוטב/סליקה ב- z_0. סתירה.

משפט Picard

אם z_0 נק' סינגולרית עיקרית, אז $f(D^*_{z_0}(\varepsilon))=\mathbb{C}$ או $f(D^*_{z_0}(\varepsilon))=\mathbb{C}\setminus\{[illegible]\}$

למשל $e^{1/z}$ מהסוג השני. לא נוכיח בקורס

אינדקס של מסילה (winding number)



למה - $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ מסילה.
אז יש פונקציה רציפה $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$:

$$\forall t\in[a,b].\ \theta(t)\in\arg\gamma(t)$$

כמו כן, אם θ^* הי"א בחירה אחרת, אז יש $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-

$$\forall t.\ \theta^*(t)=\theta(t)+2\pi k$$

הוכחה - יחידות - כיוון ש- $\theta-\theta^*$ רציפה, אבל $\theta(t)-\theta^*(t)\in 2\pi\mathbb{Z}$
לכל $t\in[a,b]$, לכן $\theta-\theta^*$ קבועה ומקבלת ערך ב- $2\pi\mathbb{Z}$
קיום - אם γ מפספסת ב- $(-\infty,0]$ נשתמש ב- $\theta(t)=Arg(\gamma(t))$
אם מפספסת ישר אחר דרך הראשית נשתמש בפונ' ארגומנט רציפה אחרת.

במקרה הכללי, נפרק את γ לחתיכות $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$
כך שבקטעים $[t_i,t_{i+1}]$ העקומה γ מפספסת איזשהו ישר.
נבחר בכל קטע פי θ כנ"ל רציפה, ונחבר את
הכל ע"י שינוי הערכים בכל קטע כדי שנק' ההתחלה והסוף יצדהו.

למה - בהינתן $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ יש פונקציה רציפה $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $t\in[a,b]$
מתקיים ש- $\theta(t)=Arg(\gamma(t))$

טענה - אם γ חלקה למקוטעין אז הפונקציה

$$\Psi(t)=Log(\gamma(t))+\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds\ ,\quad \forall t\in[a,b]$$

היא בחירה רציפה של $\ln\gamma$.
כלומר, $\gamma(t)=e^{\Psi(t)}$

הגדרה - תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ עקומה סגורה - $\gamma(a)=\gamma(b)$.
תהא θ בחירה רציפה של הארגומנט, או ψ בחירה רציפה של $\log\gamma$.
אז האינדקס של γ סביב 0 הוא:

$$Ind_\gamma(0)=\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}=\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2\pi i}$$

הגדרה - תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלה, $z\notin\gamma$. נניח ש-γ סגורה.
נגדיר ש- $\gamma_z(t)=\gamma(t)-z$, $\gamma_z:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אז נגדיר:

$$Ind_\gamma(z)=Ind_{\gamma_z}(0)$$

משפט - $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, חלקה למקוטעין, $z\notin\gamma$. אזי -

$$Ind_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}\,d\xi$$

הוכחה - נניח בה"כ ש- $z=0$, ראינו ש- $\psi(t)=c+\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds$ היא בחירה רציפה של $\log\gamma$.
לכן:

$$Ind_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}(\psi(b)-\psi(a))=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi}$$

ל- z כללי זה נובע מ- $z=0$ ומהגדרת $Ind_\gamma(z)$.

תכונות האינדקס

1) $Ind_\gamma(z)=Ind_{-\gamma}(z)$
2) הערך של $Ind_\gamma(z)$ לא תלוי בפרמטריזציה של γ.

למה - (נסמן) $\mathbb{C}\setminus\gamma=U$
3) $Ind_\gamma(z)$ קבועה על כל רכיב קשירות של U
4) $Ind_\gamma(z)=0$ על רכיב הקשירות הלא חסום של U.

הוכחה - 3) מרציפות $g(z)=Ind_\gamma(z)$, $g:U\to\mathbb{Z}$
4) $\gamma\subseteq\mathbb{C}$ קומפקטית לכן יש $R\in\mathbb{R}$ כך ש- $\gamma\subset D_0(R)$.
כיוון ש- $\mathbb{C}\setminus D_0(R)$ קבוצה קשירה ב- $\mathbb{C}$, היא חייבת להיות מוכלת באחד מרכיבי הקשירות של U, בפרט ברכיב הלא חסום של U.
נבחר שם z_0, ונבחר $z\notin D_0(R)$.

$$Ind_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}=0$$

כי $\frac{1}{\xi-z}$ הולומורפית ב- $D_0(R)$ המכילה את γ, וקמור.

כעת נובע שמשום ש- z_0, z באותו רכיב קשירות

$$0=Ind_\gamma(z_0)=Ind_\gamma(z)$$

Scanned by CamScanner

נוסחאת קושי הכללית

$f \in Hol(G)$, G תחום קמור, $\gamma \subset G$ מסילה סגורה,

$$\forall z \in G \setminus \gamma \quad Ind_\gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

הוכחה - נגדיר
$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \\ f'(z) & \xi = z \end{cases}$$

g פונ' רציפה, הולומורפית ב- $G \setminus \{z\}$ $\longrightarrow$ הולומורפית בכל G.

משפט קושי- : $0 = \int_\gamma g(\xi) d\xi$

$$= \int_\gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - f(z) \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi}_{Ind_\gamma(z) \cdot 2\pi i}$$

באופן דומה -

$$Ind_\gamma(z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

הומוטופיה

הגדרה - הומוטופיה של מסילות סגורות בתחום G היא העתקה רציפה

$$\Gamma : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow G$$

כך שלכל $s \in [0,1]$ הפונקציה:

$$\gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$$

היא מסילה סגורה

נניח בנוסף שלכל s, γ_s חלקה למקוטעין, $\frac{\partial^2 \gamma_s(t)}{\partial s \partial t}$ קיים ורציף, ושם ש-Γ גזירה ב-s ברציפות.

הגדרה - γ_0, γ_1 סגורות יקראו הומוטופיות אם יש הומוטופיה Γ כך ש:

$$\forall t, \quad \gamma_0(t) = \Gamma(0,t)$$
$$\gamma_1(t) = \Gamma(1,t)$$

משפט- אם $f \in Hol(G)$, γ_0, γ_1 סגורות והומוטופיות ב-G, אז

$$\int_{\gamma_0} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi$$

הוכחה - $I(s) = \int_{\gamma_s} f(\xi)\, d\xi$

נראה כי $\forall s.\ I'(s) = 0$.

$$I(s) = \int_a^b \underbrace{f(\gamma_s(t))\, \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}}_{\text{רציפה ב-}s,t\text{ וגזירה ברציפות ב-}s}\, dt$$

לכן מהתרגיל:

$$\frac{\partial}{\partial s} I = \int_a^b \left(f'(\gamma_s(t))\, \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t} + f(\gamma_s(t))\, \frac{\partial^2 \gamma_s(t)}{\partial s\, \partial t} \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[f(\gamma_s(t)) \cdot \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \right] d\cancel{\xi}t =$$

$$= f(\gamma_s(t))\, \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \Big|_{t=a}^{t=b} = 0$$

מסקנה - γ_0, γ_1 מסילות סגורות, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_0, \gamma_1$, γ_0, γ_1 הומוטופיות ב- $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ -
$\text{Ind}_{\gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z)$

(לא חייב $\mathbb{C}$, אפשר בתחום G)

הגדרה - $\gamma \subset G$ נקראת כוויצה ב-G אם היא הומוטופית למסילה קבועה בשח'.

הערה - בכל תחום קמור, כל מסילה סגורה ~~...~~ היא כוויצה (תחום פשוט קשר)

סיבה: נגדיר $\Gamma(0,t) = \gamma(t)$.

$\Gamma(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0)$

$\forall t.\ \gamma_1 = \Gamma(1,t) = \gamma(0)$

מסקנה - f הולומורפית בתחום G ו- γ מסילה כוויצה, אז

הכללה של משפט קושי $\rightarrow$ $\int_\gamma f\, dz = 0$

תזכורת

אינדקס של γ ב-0 (γ מסילה סגורה שלא עוברת ב-0):

$$Ind_\gamma(0) := \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

θ – בחירה רציפה של הארגומנט.

$$Ind_\gamma(z) := Ind_{\gamma_z}(0)$$

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \quad , \quad \gamma_z(t) = \gamma(t) - z$$

קריטריון לקיום פונקציה קדומה

בהינתן $f \in Hol(G)$, האם יש ל-f קדומה הולומורפית ב-G?

לא תמיד: $f(z) = \frac{1}{z}$ בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

תנאי הכרחי: לכל מסילה סגורה $\gamma \subset G$: $\int_\gamma = 0$

משפט - f רציפה בתחום G, אז ל-f יש קדומה ב-G אמ"מ לכל $\gamma \subset G$ סגורה

$$\int_\gamma f = 0$$

הוכחה - נקבע $z_0 \in G$ ולכל $z \in G$ תהאו γ_z מסילה חלקה בין z_0 ל-z ונגדיר:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi$$

ההנחה גוררת ש-F מוגדרת היטב (כי כל המסילות האלה צריכות להיות שוות כדי שהאינטגרל על כל מסילה סגורה יתאפס).

נבחר $w_0 \in G$ ונראה כי F גזירה ו-$F'(w_0) = f(w_0)$

יהי $D \subset G$ דיסק קטן סביב w_0, ולכל $w \in D$ נסמן ב-$[w_0, w]$ את הקטע הישר המחבר בין w ל-w_0 אז:

$$F(w) = \int_{\gamma_{w_0}} f(\xi)d\xi + \int_{[w_0,w]} f(\xi)d\xi$$

לפי משפט קושי יש ל-f פ' קדומה ב-D, נסמנה ב-G. אז:

$$F(w) = \int_{\gamma_{w_0}} f(\xi)d\xi + \int_{[w_0,w]} G'(\xi)d\xi =$$

$$= C + G(w) - G(w_0)$$

לפיכך F גזירה ו- $F'(w) = G'(w) = f(w)$

חזרה לענפי log

- ענף של $\log z$ בתחום G הי"א פ' ~~[illegible]~~ $g\in Hol(G)$ המקיימת:

$$\forall z\in G.\ e^{g(z)}=z$$

- באופן דומה, ענף של $z^{1/5}$ בתחום G הי"א פ' $g\in Hol(G)$ המקיימת:

$$\forall z\in G.\ g(z)^5=z$$

נכליל: תהה $f\in Hol(G)$ (תחום), ענף של $\log f(z)$ זו פונ' $g\in Hol(G)$ שמקיימת:

$$\forall z\in G.\ e^{g(z)}=f(z)$$

תנאי הכרחי - $f(z)\neq 0$ $\forall z\in G$.
זה אינננו תנאי מספיק

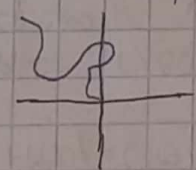
משפט - $f\in Hol(G)$ ללא אפסים.
אז קיים ענף של $\log f$ ב- G אמ"מ לכל ~~[illegible]~~ $\gamma\subset G$ סגורה:

$$Ind_{f\circ\gamma}(0)=0$$

כלומר - לכל γ סגורה, $f\circ\gamma$ "לא מקיפה את הראשית".

מסקנות - אם $G\subset\mathbb{C}$ שלא מכילה את הראשית, אז יש ענף של $\log z$ אמ"מ לכל $\gamma\subset G$ סגורה $Ind_\gamma(0)=0$

~~ל~~לדוגמה -
1) ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אין ענף של $\log z$
2) לכל קרן L שיוצאת מהראשית יש ענף ב- $\mathbb{C}\setminus L$
3) ב- $\mathbb{C}$ בלי המסילה הכחולה יש ענף ~~[illegible]~~ של $\log z$
למה? כי לכל מסילה, האינדקס של כל הכחול 0,
ו- 0 חלק מהכחול.



טענה חשובה - $f:G\to\mathbb{C}$ לא מתאפסת על γ, $\gamma\subset G$ מסילה סגורה.

$$Ind_{f\circ\gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi$$

הוכחה -

$$\int_\gamma\frac{f'}{f}=\int_a^b\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt=$$

$$=\int_a^b\frac{\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right)}{f(\gamma(t))}\,dt=\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz$$

הוכחת המשפט - התנאי שקול לכך ש- $\int_\gamma \frac{f'}{f}=0$.

נניח g ענף של $\log f$ ב- G.

$\forall z\in G,\ e^{g(z)}=f(z)$

$$g'e^g=f' \longrightarrow g'=\frac{f'}{f}$$

לכן g קדומה של $\frac{f'}{f}$ ומכאן $\int_\gamma \frac{f'}{f}=0$.

מצד שני, אם מתקיים $\int_\gamma \frac{f'}{f}=0$, נבחר $z_0\in G$ ונקח:

$$g(z)=\mathrm{Log}\, f(z_0)+\int_{z_0}^{z}\frac{f'}{f}$$

$g(z)=\mathrm{Log}\, f(z_0)+H(z)$, $\underbrace{\frac{f'}{f}}_{\text{קדומה של}}$ כלומר $\frac{f'}{f}=H'$ $\longrightarrow g\in Hol(G)$

נראה כי $e^{g(z)}\overset{?}{=}f(z)$. נסמן $G=f\cdot e^{-g}$.

אז

$$G'=f'e^{-g}-fe^{-g}\cdot g'=$$

$$=e^{-g}\left(f'-f\cdot\frac{f'}{f}\right)=0$$

לכן G קבועה. $G(z_0)=f(z_0)\cdot e^{-\mathrm{Log}\, f(z_0)}=1$

לכן $G\equiv 1$

תרגיל - הראו שיש ענף של $\log\frac{z-z_1}{z-z_2}$ ב- $\mathbb{C}\setminus[z_1,z_2]$

כל מסילה בין z_1 ל-z_2

שאריות

הגדרה - $f:D^*_{z_0}(r)\to\mathbb{C}$ הול', יש פיתוח לורן

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad z\in D^*_{z}(r).$$

השארית של f ב- z_0: $Res_{z_0}(f)=a_{-1}$ (מקדם לורן של $\frac{1}{z-z_0}$).

נוסחה נוספת לחישוב השארית: נניח של- f יש קוטב מסדר m ב- z_0.

$$f=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\dots$$

$$g=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\dots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\dots$$

g הול' ב- z_0 ואם נגזור אותה $m-1$ פעמים ונציב z_0 נקבל את $(m-1)!\cdot a_{-1}$.

כלומר:

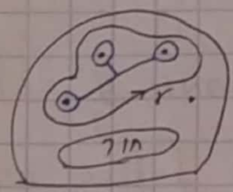
$$Res_{z_0}(f)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

משפט השארית

תהי $f\in Hol(G\setminus E)$ כש- G תחום, E מס' סופי של נק' סינגולריות.
תהי $\gamma\subset G\setminus E$ מסילה סגורה שכוויצה ב- G.

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{z\in E} \mathrm{Ind}_z(f)\cdot \mathrm{Res}_z(f)$$

הוכחה - אינטואיציה טופולוגית



• - נק' סינגולריות
— - המסילה המקורית
— - הקיווץ שלנו.

נוכיח עבור הקיווץ. קיצר טריוויאלי.

נראה הוכחה אנליטית פורמלית.

נסמן $E=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_q\}$. נסמן ב- S_K את הטור השלילי בפיתוח לורן של f סביב ξ_K $1\le K\le q$.

$$\forall z\in G\setminus\{\xi_K\}\quad S_K(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} \underset{\uparrow}{a_n^{(K)}}(z-\xi_K)^n$$

מקדם לורן של f בדיסק קטן סביב ξ_K.

נקח $g=f(z)-\sum_{K=1}^{q} S_K(z)$ מוגדרת והולומורפית ב- $G\setminus E$

נוכיח כי g הולו' ב- G, כלומר ξ_K נק' סליקה עבור g.

אכן בסביבת ξ_K, f ו- S_K מבטלות את החזקות השליליות בפיתוח לורן של f.
לפיכך, כיוון ש- γ כוויצה,

$$\int_\gamma g=0$$

לכן,

$$\int_\gamma f=\sum_{K=1}^{q}\underbrace{\int_\gamma S_K(z)\,dz}_{\text{ההתכנסות במ"ש מקומית}}=\sum_{K=1}^{q}\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(K)}\int_\gamma (z-\xi_K)^n=$$

$$=\sum_{K=1}^{q}\mathrm{Res}_{\xi_K}(f)\underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z-\xi_K}\,dz}_{2\pi i\,\mathrm{Ind}_\gamma(\xi_K)}$$

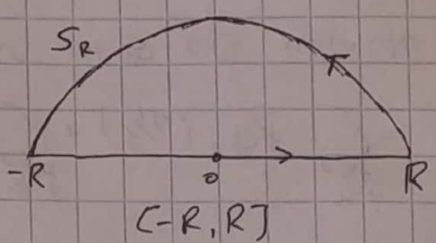
דוגמה לחשבון אינטגרל ממשי

נראה - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

פיתרון - $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$

ל- f יש קטבים בנק' בהן $z^4=-1$ והם $\underset{z_1}{e^{\frac{\pi i}{4}}},\ \underset{z_2}{e^{\frac{3\pi i}{4}}},\ e^{\frac{5\pi i}{4}},\ e^{\frac{7\pi i}{4}}$

נקח את המסילה: $\Gamma_R \longrightarrow$



הגבל האפל של אורך ה-S

נשים לב - $\left|\int_{S_R} f\,dz\right| \leq \pi R \cdot \sup_{z\in S_R}\left|\frac{1}{1+z^4}\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

נחשב שאריות - $\mathrm{Res}_{z_1} f = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)}{1+z^4} \overset{L}{=} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z_1^3} = \frac{1}{4}e^{\frac{5\pi i}{4}}$

$\mathrm{Res}_{z_2} f = \frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}$

חישובים עם גיאומטריה

ממשפט השארית: $\int_{\Gamma_R} f = \frac{2\pi i}{4}\left[e^{\frac{5\pi i}{4}} + e^{\frac{7\pi i}{4}}\right] = \frac{2\pi i}{4}\left(-2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right) =$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ $\longrightarrow$ קול!

$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{S_R} f(z)\,dz$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx$, $\int_{S_R} f(z)\,dz \to 0$

עיקרון הארגומנט

לא קבועה

יהי G תחום ו- $f\in Hol(G)$ פרט למספר סופי של נק' סינגולריות קטביות.
תהי $\gamma\subset G$ מסילה כוויצה כך ש- $\forall z\in G.\ Ind_\gamma(z)\in\{0,1\}$
ונגדיר $Int(\gamma)=\{z\mid Ind(z)=1\}$. נניח של- f אין אפסים או קטבים על γ.
כמו כן: מס' האפסים של f ב- $Int(\gamma)$ כולל ריבוי $=Z$
מס' הקטבים של f ב- $Int(\gamma)$ $=P$

הראינו כבר

אז:
$$Ind_{f\circ\gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}=Z-P$$

הוכחה - הפונקציה f'/f מרומורפית ב- G, והנק' הסינגולריות הן אפסים או קטבים של f.
לכן ממשפט השארית:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'/f=\sum_{z\text{ אפס של } f} Res_z(f'/f)+\sum_{z\text{ קוטב של } f} Res_z(f'/f)$$

נניח ש- z_0 אפס מריבוי m, ניתן לכתוב $f=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0)\neq 0$
בסביבה של z_0, ו- g הולומורפית.

$$f'=m(z-z_0)^{m-1}g(z)+g'(z)\cdot(z-z_0)^m$$

אז $\cancel{f'/f=\frac{m\,g(z)}{z-z_0}}$
$$\frac{f'}{f}=\frac{m}{z-z_0}+\underbrace{\frac{g'}{g}}_{\text{הולומורפית}}$$

לכן $Res_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)=m$

נניח z_0 קוטב, אז $f=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

$$f'=-m(z-z_0)^{-m-1}g(z)+g'(z-z_0)^{-m}$$
$$\frac{f'}{f}=\frac{-m}{z-z_0}+\frac{g'}{g}$$

לכן $Res_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)=-m$

לכן קיבלנו -
$$\sum_{z\text{ אפס}} Res_z(f'/f)=Z$$
$$\sum_{z\text{ קוטב}} Res_z(f'/f)=P$$

משפט Rouché

יהי G תחום ו- f,g הולומורפיות לא קבועות ב- G.
תהא $\gamma\subset G$ מסילה כוויצה כך ש- $Ind_\gamma(z)\in\{0,1\}$ $\forall z\in G\setminus\gamma$. נגדיר $Int(\gamma)$ כמו קודם.
נניח בנוסף כי:

$$\forall z\in\gamma.\ |f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)| \qquad (*)$$

אז ל- f,g אותו מספר אפסים ב- $Int(\gamma)$.

הוכחה - מ- $(*)$ נובע של- f ול- g אין אפסים על γ.
נגדיר $h=f/g$ מרומורפית ב- G ו- h הול' בסביבת γ, ואין לה אפס ב-γ.
נחלק את $(*)$ ב- $|g(z)|$:

$$|1-h(z)|<1+|h(z)|$$

נובע שלכל $z\in\gamma$, $h(z)\notin(-\infty,0]$.

לכן 0 נמצא ברכיב הקשירות הלא חסום של $h\circ\gamma$ ומכאן ש-

$$Ind_{h\circ\gamma}(0)=0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h}$$

$$\frac{h'}{h}=\cancel{\ \ }=\frac{f'g-g'f}{f/g\cdot g^2}=\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'}{g}=Z_f-Z_g$$

משפט Hurwitz

מס' האפסים של f ב- G כולל ריבויים $\to Z_f$

G תחום, $f_n\in Hol(G)$, $n=1,2\ldots$, $Z_{f_n}(G)=0$
ו- $f_n\to f$ במ"ש מקומית. אז או ש- f קבועה, או ש- $Z_f(G)=0$.

הוכחה - נניח בשלילה $f(z_0)=0$. $\exists z_0$. אבל f לא קבועה. ($f\in Hol(G)$ מ- Morera)
נבחר דיסק קטן $D_{z_0}(\varepsilon)$ כך שלכל $z\in\partial D_{z_0}(\varepsilon)$, $f(z)\neq 0$ [ממשפט היחידות]
לכן יש $c>0$ כך ש-

$$\forall z\in\partial D_{z_0}(\varepsilon).\ |f(z)|\geq c$$

לכן:

$$\forall z\in\partial D_{z_0}(\varepsilon).\ |f_n-f|<|f|+|f_n|$$

החל מ- n מסוים. (לעשות חדו"א כדי להבין למה).

לכן מתקיימים תנאי משפט Rouché על $g=f_n$, $f=f$, לכן $Z_f(D)=Z_g(D)$
לכן ל- g לפחות אפס אחד בדיסק. סתירה.

מסקנה - G תחום, $f_n\in Hol(G)$ חח"ע, $f_n\to f$ במ"ש מקומית
אז או ש- f קבועה או ש- f חח"ע.

סיבה - נניח ש- $f(z_1)=f(z_2)$, $z_1\neq z_2$. נגדיר $\varphi(z)=f(z)-f(z_2)$, $\varphi_n(z)=f_n(z)-f_n(z_2)$
אז ~~[illegible]~~ $\varphi_n(z)\to\varphi(z)$ מקומית במ"ש.
ל- φ_n אין אפסים ב- $G\setminus\{z_2\}$ אז ממשפט Hurwitz או ש- φ קבועה
ואז f קבועה, או של- φ אין אפסים ב- $G\setminus\{z_2\}$, כלומר f חח"ע.

משפט הכיסוי המסועף

הגדרה - $f \in Hol(G)$ לא קבועה, $w_0 = f(z_0)$. אזי
נאמר ש- w_0 מתקבלת בריבוי m, אם z_0 אפס בריבוי m של $f(z)-w_0$
(כלומר, הפיתוח טיילור של f סביב z_0 הוא:
$$f(z) = w_0 + \underset{\neq 0}{a_m} (z-z_0)^m + \dots \ )$$

משפט - $f \in Hol(G)$ לא קבועה.
$w_0 = f(z_0)$ מתקבלת בריבוי m.
אז לכל ε קטן מספיק יש δ כך שלכל w המקיים $0<|w-w_0|<\delta$
יש בדיוק m פתרונות שונים למשוואה $f(z)=w$ בדיסק $D_{z_0}(\varepsilon)$,
ובפרט w מתקבלת בריבוי 1.
כלומר, יש בדיוק $z_1,\dots z_m$ כך ש: $f(z_1)=m$

הוכחה - כיוון ש- f לא קבועה לכל ε קטן מספיק מתקיים ש-
$$\forall z \in \partial B_{z_0}(\varepsilon).\ \begin{cases} f(z)\neq w_0 \\ f'(z)\neq 0\end{cases}$$
(עבור ממשפט היחידות עבור f ו-f')
לפיכך יש δ כך ש- $|f(z)-w_0|>\delta$ לכל $z\in\partial B_{z_0}(\varepsilon)$ [מקומפקטיות]

יהי $w \in D^*_{w_0}(\delta)$.
נסמן $h(z)=f(z)-w$ ו- $g(z)=f(z)-w_0$.
נשים לב:
$$\forall z.\ \partial B_{z_0}(\varepsilon).\ |h(z)-g(z)|=|w-w_0|<\delta<|g(z)|$$
ממשפט Rouché $Z_h(B_{z_0}(\varepsilon)) = Z_g(B_{z_0}(\varepsilon))$
ו- $Z_g(B_{z_0}(\varepsilon))=m$, לכן $Z_h=m$.
כיוון ש- $f'(z)\neq 0$ בדיסק $B_{z_0}(\varepsilon)$ כל 0 של h מתקבל בריבוי 1.

מסקנות

1) משפט ההעתקה הפתוחה - $f\in Hol(G)$ לא קבועה, G תחום. אז לכל $V\subset G$ פתוחה, גם $f(V)$ פתוחה.

סיבה - תהי $w_0 \in f(V)$. ממשפט קודם, לכל ε קטן יש δ כך שלכל w המקיים $0<|w-w_0|<\delta$ יש פיתרון למשוואה $\exists z\in B_{z_0}(\varepsilon)\ f(z)=w$ לכן $B_{w_0}(\delta)\subset f(V)$.
~~[illegible]~~ ע"י לקיחת ε קטן מספיק כך ש- $B_{z_0}(\varepsilon)\subset V$.

2) $f\in Hol(G)$ ו-חח"ע ב-G אז $f'(z)\neq 0$ $\forall z\in G$.

סיבה - נניח שיש $z_0\in G$ עבורו $f'(z_0)=0$, ו- $w_0:=f(z_0)$
אז w_0 מתקבלת בריבוי >1. לכן, ממשפט הריבוי המסועף, f אינה חח"ע.

הערה - לא להיפך! אם $\forall z\in G.\ f'(z)\neq 0 \not\Rightarrow f$ חח"ע.
למשל $f(z)=e^z$. כן נובע חח"ע מקומית.

3) $f\in Hol(G)$ חח"ע, אז $f^{-1}: f(G)\to G$ היא הולומורפית.

סיבה - $f(G)$ תחום. f^{-1} רציפה ממשפט ההעתקה הפתוחה
תרגיל - אם $g: f(G)\to G$ הפכית ל-f, הולומורפית וחח"ע, אם g רציפה, אז g גזירה,
$$g'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)},\quad w_0=f(z_0)$$

Scanned by CamScanner

משפט ההעתקה של רימן

יהי $G\subset\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר כך ש- $G\neq\mathbb{C}$ ו- $z_0\in G$, אז קיימת העתקה הולומורפית, חח"ע, ועל f כך ש:

$$f: G \xrightarrow{\sim} D_0(1)$$
$$f(z_0)=0$$

הגדרה - שני תחומים G_1, G_2 נקראים שקולים קונפורמית אם יש $f: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ הולומורפית.

מסקנה - כל שני תחומים פשוטי קשר שאינם כל $\mathbb{C}$ הם שקולים קונפורמית.

הערה - חייבים לדרוש $G\neq\mathbb{C}$ כי אין פונ' הולומורפית לא קבועות $f:\mathbb{C}\to D_0(1)$, ממשפט ליוביל.

יחידות במשפט רימן - אם g העתקה נוספת $g: \xrightarrow{\sim} D_0(1)$, $g(z_0)=0$ אז קיים $\theta_0\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$g(z)=e^{i\theta_0}\cdot f(z)$$

הוכחה - תהי $h=f\circ g^{-1}$ הולו' חח"ע ועל ו- $h(0)=0$.
מהלמה של שוורץ $|h'(0)|\leq 1$.
מצד שני $h^{-1}=g\circ f^{-1}$ לכן $\frac{1}{|h'(0)|}=|(h^{-1})'(0)|\leq 1$
לכן $|h'(0)|=1$

מהלמה של שוורץ $\exists|\lambda|=1.\ \forall z\in D_0(1).\ f(g^{-1}(z))=\lambda z$

נסמן $G\ni w=g^{-1}(z)$

מקבלים $f(w)=\lambda g(w)$ $\forall w\in G$.

רעיון להוכחת קיום: נניח f היא הפונ' המבוקשת $g: G\to D_0(1)$ הולו', $g(z_0)=0$.
אז $h(z)=g(f^{-1}(z))$ הולו' מ- $D_0(1)$ ל- $D_0(1)$ ו- $h(0)=0$ לכן $|h'(0)|\leq 1$
מכלל השרשרת:

$$|h'(0)|=\left|\frac{g'(z_0)}{f'(z_0)}\right|\leq 1$$

קיבלנו $|g'(z_0)|\leq|f'(z_0)|$, $f(z_0)=0$

רעיון - ננסה למצוא פונקציה $f: G\to D_0(1)$ הממקסמת את $|f'(z_0)|$

רעיון אחר - נבחר נק' $z_1\in G$, $z_0\neq z_1$ וננסה למצוא פ' $f:G\to D_0(1)$, $f(z_0)=0$ שממקסמת את $|f(z_1)|$

משפט Stieltjes-Osgood - תהי G תחום, $f_n: G\to\mathbb{C}$ הולומורפיות,
ו- $\exists M.\ \forall n.\ \forall z\in G.\ |f_n(z)|\leq M$.
אז יש תת-סדרה f_{n_k} המתכנסת במ"ש מקומית ב- G.

הערה - במקום חסומות ניתן לדרוש "חסומות במ"ש מקומית"

הוכחה - מספיק להראות שלכל דיסק D המקיים $\bar{D}\subset G$ יש תת"ס המתכנסת במ"ש ב- $\bar{D}$.
אכן, יהיו $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ קב' בת מניה של דיסקים $\bar{D}_k\subset G$ כך ש- $\bigcup_k D_k=G$.
לפי ה-"מספיק" תהא $\{f_{n,1}\}$ תת סדרה של $\{f_n\}$ המתכנסת ב- $\bar{D}_1$.
עכשיו תהא $\{f_{n,2}\}$ תת סדרה של $\{f_{n,1}\}$ המתכנסת במ"ש ב- $\bar{D}_1\cup\bar{D}_2$.
באופן דומה, לכל k נקבל תת סדרה $\{f_{n,k}\}$ המתכנסת במ"ש על $\bar{D}_1\cup\ldots\cup\bar{D}_k$.

הסדרה האלכסונית לכל n $\{f_{n,n}\}$ היא סדרה המתכנסת במ״ש ב- $\overline{D}_n$.
מכאן, ש- $f_{n,n}$ מתכנסת במ״ש מקומית ב- G כי לכל $z\in G$ יש k כך ש- $z\in \overline{D}_k$.

יהי $\overline{D}\subset G$ דיסק $f_n:\overline{D}\to\mathbb{C}$ חסומות ע״י M, נניח בה״כ שמרכז הדיסק הוא 0, ונפתח פיתוח טיילור של f_n ב- D.

התכנסות במ״ש מקומית ב- D $\rightarrow$ $\forall z\in D.\quad f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}z^k$
כאשר:

$$|a_{n,k}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_0(r)}\frac{f_n(\xi)}{\xi^{k+1}}\,d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{2\pi r\cdot M}{2\pi\cdot r^{k+1}}=\frac{M}{r^k}$$

לפיכך לכל k הסדרה $\{a_{n,k}\}_{n\ge1}$ חסומה.
רוצים למצוא תת״ס n_j עבור הסדרה $\{a_{n_j,k}\}_{j\ge1}$ מתכנסת לכל $k\ge0$.

תהה $\{a_{n_j,0}\}_{j\ge1}$ תת״ס של $\{a_{n,0}\}_{n\ge1}$ מתכנסת.

עכשיו, תהה $\{a_{n_{j,1}}\}_{j\ge1}$ תת״ס של $\{a_{n_j,1}\}$ שמתכנסת.

כלומר הסדרה $\{n_{j,1}\}_{j\ge1}$ מקיימת ש- $\{a_{n_{j,1},0}\}_{j\ge1}$, $\{a_{n_{j,1},1}\}_{j\ge1}$ מתכנסות.

באופן כללי, בהינתן תת״ס $\{n_k\}$ עבורה $\{a_{n_k,l}\}$ מתכנסת לכל $k\ge l\ge0$.

נהיה מגעיל עם אינדקסים, זה לא משפט במרוכבות בכלל, נמאס לי.

בחינה

21.6 9:00, 3 שעות. על החומר כולל שבוע הבא
ללא חומר עזר, ללא מחשבון

5 שאלות, עונים על 4, 25 נק' על שאלה

אין הוכחות משפטים

הבחינה לא קשה לדעת אופיר

ציון שב"ב - 10% מגן/בונוס (לא הבנתי איך...)

טענה שהתבררנו בהוכחה משבוע שעבר, הנה הוכחה מתוקנת:

טענה - $\{a_{n,k}\} \subseteq \mathbb{C}$ $_{k\geq 1}^{n\geq 1}$ כך שלכל k הסדרה $\{a_{n,k}\}_{n\geq 1}$ חסומה.

צ"ל - לכל $n_j \subset \{1,2,3...\}$ תת"ס כך שלכל k $\{a_{n_j,k}\}_{j\geq 1}$ מתכנסת.

הוכחה - נביט ב- $\{a_{n,1}\}_{n\geq 1}$ חסומה
לכן יש $\{n_j^{(1)}\}_{j\geq 1}$ כך ש- $\{a_{n_j^{(1)},1}\}_{j\geq 1}$ מתכנסת.

נביט ב- $\{a_{n_j^{(1)},2}\}$ חסומה.

לכן יש $\{n_j^{(2)}\}_{j\geq 1} \subset \{n_j^{(1)}\}_{j\geq 1}$ כך ש- $\{a_{n_j^{(2)},2}\}$ מתכנסת.

כיוון שזו תת"ס גם $\{a_{n_j^{(2)},1}\}$ מתכנסת.

נמשיך כך ולכל k נקבל תת"ס $\{n_j^{(k)}\}_{j\geq 1} \subset \{n_j^{(k-1)}\}_{j\geq 1}$ אשר $\{a_{n_j^{(k)},k}\}_{j\geq 1}$ מתכנסת
$\{a_{n_j^{(k)},k-1}\}_{j\geq 1}$ -״-
$\vdots$
$\{a_{n_j^{(k)},1}\}_{j\geq 1}$ -״-

נביט בסדרה $\{n_j^{(j)}\}_{j\geq 1}$.

סדרה זו מקיימת שלכל $k\geq 1$ $\{a_{n_j^{(j)},k}\}$ מתכנסת
כיוון שעבור $j\geq k$ $\{n_j^{(j)}\}_{j\geq k} \subseteq \{n_j^{(k)}\}$

בכך סיימנו את משפט Stieltjes-Osgood

משפט ההעתקה של רימן - הוכחה

משפט - $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר $G\neq\mathbb{C}$, $z_0\in G$.
אז יש העתקה הולומורפית חח"ע ועל $f:G\to D_0(1)$, $f(z_0)=0$

יחידות (הוכחנו כבר) - אם g פ' נוספת כנ"ל אז קיים $\theta\in\mathbb{R}$:
$$g(z)=e^{i\theta}f(z)$$

נגדיר - $F=\left\{f:G\to D_0(1) \mid \begin{matrix} f\in Hol(G) \\ f(z_0)=0 \end{matrix},\ f \text{ חח"ע} \right\}$

למה I - $F\neq\emptyset$ ~~[illegible]~~

למה II - נסמן $\rho=\sup\{|f'(z_0)| \mid f\in F\}$
אז יש $f\in F$ כך ש- $\rho=|f'(z_0)|$ (ובפרט $0<\rho<\infty$)

למה III - f מלמה II היא על $D_0(1)$.

הוכחת משפט רימן - למה $1+2+3$.

הוכחת I - מספיק למצוא f הולומורפית ב-G חח"ע וחסומה, כי אם f כזו חסומה ע"י R נקח:
$$g(z)=\frac{1}{2R}f(z)-\frac{f(z_0)}{2R}$$

כיוון ש- $G\neq\mathbb{C}$, תהא $a\in\mathbb{C}\setminus G$. כיוון ש- G פשוט קשר,
לכל מסילה סגורה $\gamma\subset G$,
$$\int_\gamma \frac{(z-a)'}{z-a}=0$$

לפיכך יש ענף של $\log$ לפונקציה $z-a$.
לכן יש ענף של שורש $z-a$. כלומר יש $r:G\to\mathbb{C}$
הולומורפית כך ש-
$$r(z)^2=z-a \quad \forall z\in G$$

(כיוון שאם $l:G\to\mathbb{C}$ הוא ענף של $\log(z-a)$, כלומר $e^{l(z)}=z-a$
אז $e^{\frac{1}{2}l(z)}$ היא r.)

r חח"ע כי אם $r(z_1)=r(z_2)$, אז $r(z_1)^2=r(z_2)^2$
$$\Downarrow$$
$$z_1-a=z_2-a \longrightarrow z_1=z_2$$

בנוסף, אם $r(z)=w_0$ אז אין z' כך ש- $r(z')=-w_0$, אחרת:
$$\left.\begin{matrix} r(z)^2=z-a=w_0^2 \\ r(z')^2=z'-a=(-w_0)^2=w_0^2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow z=z'$$

כלומר אם מתקבל הערך w_0 אז $-w_0$ לא מתקבל ע"י r.

המשך בעמוד הבא.

המשך הוכחת למה I - יהי w_0 ערך שמתקבל ע"י r.
לפי משפט ההעתקה הפתוחה, אז יש $\varepsilon>0$ כך ש- $D_\varepsilon(w_0)\subset r(G)$
ולכן $D_\varepsilon(-w_0)\cap r(G)=\emptyset$

לפיכך נגדיר $$f(z)=\frac{1}{r(z)+w_0}$$

מתקיים $|r(z)+w_0|\geq\varepsilon \quad \forall z\in G.$, לפיכך f חסומה וחח"ע :

$$|f|\leq\frac{1}{\varepsilon}$$

הוכחת למה II - מהגדרת ρ יש $\{f_n\}\subset F$ עבורה $|f_n'(z_0)|\longrightarrow\rho$.
ממונטל 0-ס יש תת"ס $\{f_{n_k}\}_{k\geq1}$ מתכנסת במ"ש מקומית.
תהה f פונ' הגבול $f_{n_k}\to f$

ממשפט ~~ה~~ מוררה f הולומורפית.

ממשפט ווירשטראס $f_{n_k}'\longrightarrow f'$ במ"ש מקומית

לכן $|f'(z_0)|=\rho$ ולכן $\rho<\infty$.

ברור ש- $f(z_0)=\lim f_{n_k}(z_0)=0$

הוכחת למה III - נניח ש- f אינה על. תהא $\alpha\in D_0(1)\setminus f(G)$
(נמצא $g\in F$ עם $|g'(z_0)|>|f'(z_0)|$.

בה"כ נניח כי $\alpha\in(0,1)$. נביט בפונקציה:

$$\forall z\in G.\quad h(z)=\frac{\alpha-f(z)}{1-\alpha f(z)}$$

$$\xi\longmapsto\frac{\alpha-\xi}{1-\alpha\xi}$$

היא העתקת מוביוס מהדיסק לעצמו חח"ע ועל

באופן כללי, לכל $\alpha\in D_0(1)$ העתקות המביוס החח"ע ועל מ- $D_0(1)$ ל- $D_0(1)$
הם:
$$\xi\longmapsto e^{i\theta}\frac{a-\xi}{1-\bar{a}\xi}\qquad \begin{matrix}\theta\in\mathbb{R}\\ a\in D_0(1)\end{matrix}$$

לכן $h:G\to D_0(1)$ ו- h הולומורפית.

כמקודם, כיוון ש- G פשוט קשר ו- h לא מתאפסת, $\int_\gamma\frac{h'}{h}=0$ לכל $\gamma\subset G$ סגורה.

לכן יש ענף של $\log h$ ולכן יש ענף של שורש h, כלומר יש פ' הולומורפית
$r:G\to\mathbb{C}$:
$$r(z)^2=\frac{\alpha-f(z)}{1-\alpha f(z)}\qquad(*)$$

כיוון ש- $h(z)\in D_0(1)$, $r:G\longrightarrow D_0(1)$ ~~[illegible]~~

המשך בעמוד הבא.

~~נגזור~~
המשך הוכחת למה III - נגדיר $g(z)=\frac{r(z)-r(z_0)}{1-\overline{r(z_0)}\,r(z)}$ חח"ע והולומורפית

$g(z_0)=0$, $g: G \to D_0(1)$, כלומר $g\in F$

נגזור:

$$g'(z_0) = \frac{r'(z_0)(1-|r(z_0)|^2) - 0}{(1-|r(z_0)|^2)^2}$$

נשים לב ש- $r(z_0)^2=\alpha$

$$|r(z_0)|=\sqrt{\alpha}\in(0,1)$$

נגזור את (*) משני הצדדים ב- z_0:

$$2r(z_0)\,r'(z_0) = -f'(z_0) - [\alpha f'(z_0)\alpha] = f'(z_0)\cdot(\alpha^2-1)$$

כלומר $|r'(z_0)| = \frac{(1-\alpha^2)|f'(z_0)|}{2\sqrt{\alpha}}$

$$|g'(z_0)| = \frac{|f'(z_0)|\cdot(1-\alpha^2)}{2\sqrt{\alpha}(1-\alpha)} = |f'(z_0)|\cdot\frac{(1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

ואכן $\frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}>1 \longleftrightarrow 1+\alpha>2\sqrt{\alpha} \longleftrightarrow 1-2\sqrt{\alpha}+\alpha>0$

$\Updownarrow$

$(1-\sqrt{\alpha})^2>0 \to$ אמת!

לכן $|g'(z_0)|>|f'(z_0)|$

שיעור השלמה מרוכבות

פונקציות הרמוניות

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

כאשר $f: G \to \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{-i\partial f}{\partial y}\right)$$

תכונה - $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \longleftrightarrow$ מתקיימות משוואות C-R.

הגדרה - $G \subset \mathbb{C}$ תחום. $Harm_{\mathbb{C}}(G) = \{h : G \to \mathbb{C} \mid h \in C^2(G), \Delta h = 0\}$

$h(x,y) = h(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

) $Harm(G)$ - אותו דבר בממשיים ולא מרוכבים.

1) $Hol(G) \subset Harm_{\mathbb{C}}(G)$. בפרט $Re f, Im f \in Harm(G)$

2) $G \subset \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר.

$u \in Harm(G) \longrightarrow$ קיימת $f \in Hol(G)$ כך ש- $u = Re(f)$

3) $u \in Harm_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} \in Hol(G)$

הוכחה 3 - $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}\Delta u = 0$

הוכחה 2 - נניח $u \in Harm(G)$. נגדיר

$$g = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

אזי $g \in Hol(G)$ בגלל ש- G תחום פשוט קשר, קיימת פונקציה קדומה $f \in Hol(G)$ כך ש-

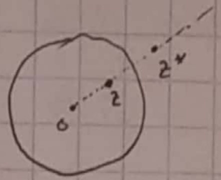
$$f'(z) = g(z) \quad \forall z \in G$$

נסמן $f = u_1 + i v_1$

$$f'(z) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial y} = g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow u = u_1 + c$$

כי G תחום



נסמן $D_R = \{|z|<R\}$

נניח $f \in Hol(D_R) \cap C(\overline{D}_R)$

לכל $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad , z \in D_R$

נסתכל על $z^* = \frac{R^2}{\overline{z}} \quad , \quad \begin{matrix} \arg z^* = \arg z \\ |z| \cdot |z^*| = R^2 \end{matrix}$

מתקיים - $0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi$

נסמן $h(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} \quad , \quad h \in Hol(D_R) \cap C(\overline{D}_R)$

נחסיר - $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z^*}\right) d\xi =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(\xi) \frac{z - z^*}{(\xi - z)(\xi - z^*)} d\xi = [\xi = Re^{i\theta}] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{(z - \frac{R^2}{\overline{z}})Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)(Re^{i\theta} - \frac{R^2}{\overline{z}})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{(Re^{i\theta} - z)(Re^{-i\theta} - \overline{z})} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

$$\frac{-\overline{z}(Re^{i\theta} - R^2)}{Re^{i\theta}} = -(\overline{z} - Re^{-i\theta}) = Re^{-i\theta} - \overline{z}$$

מסקנה - אם $f \in Hol(D_R) \cap C(\overline{D}_R)$ אז לכל $z \in D_R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

מסקנה - $u \in Harm(D_R) \cap C(\overline{D}_R) \leftarrow$ לכל $z \in D_R$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{R - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$