תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

29 במאי 2017

תהי f גזירה בתחום U, ותהי $z_0 \in U$. נגדיר

$$R = \sup\left\{r \geq 0 \mid B\left(z_0, r\right) \subseteq U\right\}$$

אזי f אנליטית בנקודה z_0 וטור החזקות שמתאר אותה מתכנס ברדיוס לפחות R. אם רדיוס ההתכנסות לטור הוא R אז הטור מתכנס במידה שווה על קומפקטיות בתוך $B\left(z_0, r\right)$. בנוסף הוא לא מתכנס כלל לאף $z \notin \overline{B}\left(z_0, R\right)$, אבל אנחנו לא יודעים מה קורה בשפה. מה אם יש קטבים? למשל $f = \frac{1}{1-z} = \sum z^n$ בעלת רדיוס התכנסות של 1 - בנקודה $z = 1$ יש קוטב,

$$\lim_{z \to 1} f\left(z\right) = \infty$$

לכן לא קיימת פונקציה גזירה $g : B\left(0, 1+\varepsilon\right) \to \mathbb{C}$ שמזדהה עם f על $B\left(0, 1\right)$. מה גבי הפונקציה $\frac{1}{1+x^2}$? רדיוס ההתכנסות של טור החזקות שלה באפס הוא 1, למרות שלכאורה אין בעיה בציר הממשי - וזאת בגלל הקטבים בנקודות $\pm i$.

נתבונן בענף הסטנדרטי של הלוגריתם Log, ונפתח אותו לטור חזקות סביב 1. זה שקול לפיתוח $\mathrm{Log}\left(1-z\right)$ סביב 0 ונקבל

$$\mathrm{Log}\left(1-z\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

כעת נמצא קדומה של $-\mathrm{Log}\left(1-z\right) - 1$ ונקבל

$$\left(1-z\right)\mathrm{Log}\left(1-z\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\left(n+1\right)n}\right) - z$$

משפט 0.1 אם טור חזקות $f\left(z\right) = \sum a_n z^n$ מתכנס ברדיוס בדיוק R, אז קיימת $z_0 \in \partial B\left(0, R\right)$ כך שאין אף פונקציה אנליטית $g : U \to \mathbb{C}$ שמוגדרת בסביבה של z_0 ומסכימה עם f על $U \cap B\left(0, R\right)$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא, ואז לכל $z \in \partial B\left(0, R\right)$ אפשר לבנות $g_{z_0} : B\left(z_0, r\right) \to \mathbb{C}$ כזו. אפשר להחליף את U בגזרה $U_{z_0} = \left\{|z| < R + \varepsilon, \mathrm{Arg}\left(z\right) \in I\right\} \ni z_0$ כאשר $|I| < \pi$. נשים לב שהאיחוד $\bigcup U_z$ מכסה את השפה, שהיא קומפקט, ולכן יש תת כיסוי סופי $\bigcup U_{z_i}$. נסמן

$$\varepsilon = \min_i \left\{\varepsilon_i\right\}$$

שמתאימים לנקודות z_i בהגדרת U_{z_i}. נשים לב שניתן להדביק את כל הפונקציות שלנו לפונקציה מהכדור $B\left(0,R+\varepsilon\right)$ אל כל המישור, שהיא אנליטית, ומסכימה עם f. לכן הטור מתכנס ברדיוס לפחות $R+\varepsilon$, בסתירה.

נותר לנו להוכיח שלכל $z\in U_{z_1}\cap U_{z_2}$ הפונקציות מסכימות, כלומר $g_{z_1}\left(z\right)=g_{z_2}\left(z\right)$. נשים לב שאם החיתוך אינו ריק, אז הוא קבוצה קמורה, למעשה גזרה בעצמו, ובפרט נחתך על $B\left(0,R\right)$. נסמן $V=U_{z_1}\cap U_{z_2}\cap B\left(0,R\right)\neq 0$. אזי $g_{z_1}\mid_V=g_{z_2}\mid_V=f\mid_V$. מיחידות ההמשכה האנליטית נקבל שוויון על כל החיתוך. ■

משפט 0.2 (שנראה בשיעור הבא) אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ גזירה וחד־חד־ערכית אז היא לינארית.

אנלוג לספירת רימן ־ אם $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ גזירה וחד־חד־ערכית אז היא העתקת מוביוס.

משפט 0.3 אם $f:U\backslash\left\{z_0\right\}\to\mathbb{C}$ גזירה וקיים הגבול של f בנקודה z_0, אז אפשר להמשיך את f אנליטית בנקודה z_0.

משפט 0.4 (מוררה) אם האינטגרל על משולשים של f רציפה מתאפס אז f גזירה/אנליטית.