תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

22 במאי 2017

משפט 0.1 (משפט קושי ההומולוגי) אם $\alpha \subseteq U$ שמקיימת שלכל $w \notin U$ מתקיים $\mathrm{Ind}_{\alpha} w = 0$, אזי כל פונקציה $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה/אנליטית מקיימת

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

המשפט אופטימלי/הדוק, במובן שאם $\alpha \subseteq U$ וקיימת $w \notin U$ עם אינדקס לא 0, אז קיימת $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה שהאינטגרל שלה לא מתאפס - למשל $\frac{1}{z-w}$.

מסקנה 0.2 אם $\alpha, \beta \subseteq U$ כך שהאינדקס שלהן על כל $w \notin U$ זהה, אז לכל $f : U \to \mathbb{C}$ מתקיים

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\, \mathrm{d}z = \int\limits_{\beta} f(z)\, \mathrm{d}z$$

משפט 0.3 (נוסחת קושי) אם $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה, α לולאה שמקיימת שלכל $w \notin U$ מתקיים $\mathrm{Ind}_{\alpha} w = 0$, $z_0 \in U \backslash \mathrm{Im}\alpha$, אזי

$$\int\limits_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_{\alpha} z_0 \cdot f(z_0) = \int\limits_{\alpha} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z$$

זה נובע כי $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ גזירה בכל U. נוסחת קושי המוכללת נותנת נוסחה דומה לנגזרות - נניח לשם פשטות לרגע שמתקיים $\mathrm{Ind}_{\alpha} z_0 = 1$ (אחרת צריך לכפוף בסקלר) ונקבל

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z$$

עבור $\alpha = \partial B(z_0, R)$, ניקח פרמטריזציה $\alpha(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$, כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$, נחשב:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}} \left(iRe^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

משפט 0.4 (משפט ליוביל המצומצם) אם $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ גזירה, ומקיימת

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

אזי $f \equiv 0$.

תרגיל אם $|f| \leq M$, כלומר f חסומה, אזי f קבועה.

תרגיל תהי $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$ גזירה וחסומה, אזי f קבועה.

פתרון $g(z) = f(e^z)$ גזירה בכל $\mathbb{C}$, וחסומה כי

$$|g(z)| = |f(e^z)| \leq M$$

לכן ממשפט ליוביל נקבל כי g קבועה. כיוון שההעתקה $z \mapsto e^z$ היא על $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, נקבל כי f קבועה.

תרגיל נתונה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ גזירה שמקיימת $|f(z)| \leq C \cdot e^{\mathrm{Re}(z)}$ עבור קבוע $C > 0$ כלשהו. הוכיחו כי $f(z) = ce^z$ עבור $c \in \mathbb{C}$.

פתרון נגדיר $g(z) = \frac{f(z)}{e^z}$, ונשים לב כי $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, ועל כן נתון כי

$$|g(z)| \leq C$$

פונקציה זו גזירה בכל המישור כי e^z לא מתאפסת, ולכן משפט ליוביל היא קבועה. לכן קיבלנו את הנדרש.

טענה 0.5 נניח כי f, g גזירות בכל $\mathbb{C}$, וכן לכל z מתקיים $|f(z)| \leq C\,|g(z)|$ עבור $C > 0$ קבוע כלשהו. אזי $f = cg$.

הוכחה: נתבונן בפונקציה $h = \frac{f}{g}$. ברור כי $|h| \leq C$, וגזירה בכל $\mathbb{C}$, למעט אולי עבור אפסים של g. g היא גזירה, ולכן רגולרית, כלומר ליד כל נקודה z_0 שמאפסת את g מתקיים

$$g(z) = (z - z_0)^k \, \tilde{g}(z)$$

כאשר $\tilde{g}$ רגולרית/גזירה ולא מתאפסת בנקודה z_0. לכן נובע שגם

$$|f(z)| \leq C\,|z - z_0|^k \, |\tilde{g}(z)|$$

לכן אם נכתוב $f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z_0)$ הצגה רגולרית של f, נקבל בהכרח $m \geq k$ ולכן

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m-k} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

וזה כבר רציף וגזיר בנקודה z_0. לכן סיימנו ־ h חסומה וגזירה בכל המישור ולכן קבועה.

■