תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

15 במאי 2017

בשיעור ראינו את המשפט הבא:

משפט 0.1 (עקרון הארגומנט) נתונה f גזירה על תחום U ועל שפה של מסילה α כך שהצמצום $f\mid_{\alpha}$ לא מתאפסת. אזי כמות האפסים של f בתוך U היא

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Ind}_{f\circ\alpha}\left(0\right)$$

דוגמה עבור f כזו, ניקח $g=\frac{1}{f}$, ואז

$$\frac{g'}{g}=\frac{-\frac{1}{f^{2}}f'}{\frac{1}{f}}=-\frac{f'}{f}$$

הגדרה 0.2 מסילה $\alpha:[a,b]\to\mathbb{C}$ עם $\alpha\left(a\right)=\alpha\left(b\right)$ תקרא פשוטה אם $f\mid_{[a,b)}$ חד־חד־ערכית.

הגדרה 0.3 α תקרא פשוטה הומולוגית אם $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\alpha$ מתפצל לשני רכיבי קשירות, שייקראו פנים וחוץ, כאשר החוץ הוא כל הנקודות עבורן יש למסילה α אינדקס 0, והפנים הוא שאר הנקודות, שבו נדרוש שיש למסילה α אינדקס ±1. הסימן הזה ייקרא גם הסימן של המסילה (כלומר המסילה תקרא חיובית או שלילית לפי האוריינטציה שלה).

משפט 0.4 (ז'ורדן) כל מסילה פשוטה היא פשוטה הומולוגית, ויתר על כן, $\mathrm{Im}\alpha$ היא השפה גם של הפנים וגם של החוץ.

לא נוכיח או נשתמש במשפט. הוכחה לא מסובכת מאוד שלו תעלה לאתר הקורס.

משפט 0.5 תהא α פשוטה, U הפנים של α, f גזירה/אנליטית על U ובסביבה של α, וכן f חד־חד־ערכית על $\mathrm{Im}\alpha$. אזי $f\circ a$ מסילה פשוטה, ונסמן V את הפנים שלה. אזי

$$f:U\to V$$

היא חד־חד־ערכית ועל.

הוכחה: רוצים להראות שלכל $w \in V$ קיים ויחיד מקור בתוך U. כלומר שלמשוואה $g(z) = f(z) - w = 0$ יש שורש יחיד בתוך U. מספר השורשים הוא

$$\mathrm{Ind}_{g\circ\alpha}(0) = \mathrm{Ind}_{f\circ\alpha}(w) = \begin{cases} 1 & w \in V \\ 0 & w \in \mathbb{C}\setminus\{V \cup \mathrm{Im}\alpha\} \end{cases}$$

הנחנו כאן כי $\alpha, f\circ\alpha$ הן בעלות אותה אוריינטציה. אם היינו מניחים בשלילה שהאוריינטתיה מתהפכת, היינו מקבלים סתירה לגזירות של f בכל U מתוך משפט הארגומנט.

הראינו גם שלכל $z \in U$, $f(z)$ לא נמצא בחוץ של $f \circ \alpha$. נצטרך לוודא שהוא לא יכול להיות על $\mathrm{Im}(f\circ\alpha)$. ממשפט ההעתקה הפתוחה, עבור $B(z,\delta) \subseteq U$, תמונתו מכילה סביבה של $f(z)$. אם $f(z) \in \mathrm{Im}(f\circ\alpha)$, אז תמונת הכדור תכיל נקודות גם מהפנים וגם מהחוץ. כלומר נקבל נקודות מתוך U שעוברות אל החוץ של $f\circ\alpha$, וזו סתירה למה שאמרנו לפני רגע. לכן קיבלנו את מה שרצינו להוכיח. ■

משפט 0.6 (רושה) אם f, g אנליטיות בתחום U ובשפה ∂U, ומתקיים על ∂U האי שוויון

$$|f - g| < |f| + |g|$$

אז מספר השורשים של f ושל g עם ריבוי הוא שווה. גרסה אסימטרית - אם $|g| < |f|$, אזי לפונקציות $f, f+g$ יש את אותו מספר שורשים (כולל ריבוי).

מסקנה 0.7 (המשפט היסודי של האלגברה) ניקח

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

עבור R מספיק גדול, למשל $R > |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|, 1$ יתקיים

$$|z|^n > \left|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\right|$$

לכל $z \in \partial B(0,R)$. ממשפט רושה נובע כי יש לפונקציות $z^n, p(z)$ אותו מספר שורשים בתוך $B(0,R)$, כלומר יש לפולינום p שורשים בריבוי כולל n בתוך $B(0,R)$.

דוגמה ניקח $f(z) = z^5 + 15z + 1$. הראו כי ארבעה מתוך חמשת השורשים נמצאים בטבעת $\left\{z \mid \frac{3}{2} < |z| < 2\right\}$.

פתרון נשים לב שעבור $|z| = 2$ מתקיים

$$\left|z^5\right| = |z|^5 = 2^5 = 32$$

ולעומת זאת

$$|15z + 1| \leq 15|z| + 1 = 31$$

ועל כן מרושה לפונקציות $z^5, z^5+15z+1$ יש אותו מספר שורשים בתוך $B\left(0,2\right)$, כלומר 5. עבור $|z|=\frac{3}{2}$, נקבל

$$|15z|=\frac{15\cdot3}{2}>20$$
$$\left|z^5+1\right|\leq|z|^5+1=\left(\frac{3}{2}\right)^5+1=\frac{243}{32}+1<11$$

ועל כן מרושה יש לפונקציות $15z$, $z^5+15z+1$ יש אותו מספר שורשים בתוך $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$, כלומר 1.

דוגמה יהא

$$P_n\left(z\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$$

הראו כי לכל $R>0$, עבור n גדול מספיק, שורשי $P_n\left(z\right)$ כולם מחוץ לכדור $B\left(0,R\right)$.

פתרון נשים לב כי $P_n\to e^z$ במידה שווה על קומפקטיות, ובפרט על $\overline{B\left(0,R\right)}$. לכן עבור n גדול מספיק יתקיים לכל z עם $|z|<R$:

$$\left|P_n\left(z\right)-e^z\right|<e^{-R}\leq\left|e^z\right|$$

ומרושה נקבל שיש אותה כמות של שורשים בכדור לפונקציות $e^z, P_n\left(z\right)$ - כלומר 0.

טענה 0.8 יהא

$$p\left(z\right)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$$

פולינום. לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם

$$q\left(z\right)=\sum_{k=0}^{n}b_kz^k$$

פולינום שמקדמיו מקיימים $|b_i-a_i|<\varepsilon$ לכל i, אזי כל שורשי q נמצאים במרחק לכל היותר δ משורשים של P.

הוכחה: אפשר להקטין את δ כרצוננו. נניח כי

$$\delta<\delta_0=\frac{\min\left|z_i-z_j\right|}{3}$$

כאשר z_i, z_j שורשים של p. אזי p לא מתאפס על השפה של $\partial B\left(z_i, \delta\right)$ לכל i. נסמן

$$R = \max\left|z_i\right| + \delta_0$$

אזי

$$|p-q| < \varepsilon \sum_{k=0}^{n} |z|^k \leq \varepsilon\left(n+1\right) R^n$$

נבחר ε עבורו

$$|p-q| < \min_{\bigcup \partial B\left(z_i, \delta\right)} |p|$$

ומרושה מסיימים. ■