תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

8 במאי 2017

1 שאריות

נתבונן בפונקציה f גזירה בתחום U, למעט אולי בנקודה $z_0 \in U$. נאמר כי f בעלת סינגולריות אינטגרבילית בנקודה z_0 אם בסביבה מנוקבת של z_0 הפונקציה f היא מקיימת $f = g'$, שזה שקול לכך שמתקיים, עבור $\varepsilon > 0$ קטן מספיק,

$$\int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

כאשר f גזירה על U פרט אולי לנקודה $z_0 \in U$, נקבל שקיים ויחיד קבוע $a \in \mathbb{C}$ עבורו לפונקציה $f - \frac{a}{z-z_0}$ יש סינגולריות אינטגרבילית. אפשר לחשב את a מפורשות:

$$a = \mathrm{Res}\left(f, z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

קבוע זה נקרא השארית של f בנקודה z_0.
תוצאה חשובה שראינו: אם קיים גבול

$$\lim_{z\to z_0} f\left(z\right)\left(z-z_0\right) = a$$

אזי מתקיים $a = \mathrm{Res}\left(f, z_0\right)$.

דוגמא $f\left(z\right) = \frac{1}{z^2}$ היא בעלת סינגולריות אינטגרבילית בנקודה 0:

$$f = \left(-\frac{1}{z}\right)'$$

בפרט

$$\mathrm{Res}\left(f, 0\right) = 0$$

דוגמא f,g גזירות בתחום U, ועבור $z_0\in U$ מתקיים $g(z_0)=0\neq g'(z_0)$. אזי $\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g},z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

הוכחה:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}f(z)\frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)}=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

■

דוגמא ניקח $p(z)$ פולינום כלשהו, ונתבונן בפונקציה $\frac{p'(z)}{p(z)}$ - סינגולרית רק בשורשים של p.
אם z_0 שורש פשוט של p, אזי $p'(z_0)\neq 0$ ולכן

$$\operatorname{Res}\left(\frac{p'}{p},z_0\right)=\frac{p'(z_0)}{p'(z_0)}=1$$

נראה ישירות מההגדרה - נכתוב

$$\begin{aligned}
p(z)&=(z-z_0)q(z)\\
p'(z)&=q(z)+(z-z_0)q'(z)\\
\frac{p'(z)}{p(z)}-\frac{1}{z-z_0}&=\frac{p'(z)}{p(z)}-\frac{q(z)}{p(z)}=\frac{q(z)+(z-z_0)q'(z)}{p(z)}-\frac{q(z)}{p(z)}=\frac{(z-z_0)q'(z)}{p(z)}=\\
&=\frac{(z-z_0)q'(z)}{(z-z_0)q(z)}=\frac{q'(z)}{q(z)}
\end{aligned}$$

ופונקציה זו גזירה בסביבת z_0.
במקרה הכללי:

$$p(z)=(z-z_0)^m q(z)$$

כאשר $q(z_0)\neq 0$, $m\geq 1$. נכתוב

$$\begin{aligned}
p'(z)&=m(z-z_0)^{m-1}q(z)+(z-z_0)^m q'(z)\\
\frac{p'(z)}{p(z)}&=\frac{m(z-z_0)^{m-1}q(z)+(z-z_0)^m q'(z)}{(z-z_0)^m q(z)}=\frac{mq(z)+(z-z_0)q'(z)}{(z-z_0)q(z)}=\\
&=\frac{m}{z-z_0}+\frac{q'(z)}{q(z)}
\end{aligned}$$

ומכאן מקבלים בקלות שהשארית היא m.

דוגמא ניקח $f=\frac{1}{\sin z}$ - סינגולרית בכל נקודה מהצורה πk, $k\in\mathbb{Z}$. נחשב לפי הנוסחה:

$$\operatorname{Res}(f,\pi k)=\lim_{z\to\pi k}\frac{1}{\sin(z)}(z-k\pi)=\lim_{z\to\pi k}\frac{z-\pi k}{\sin(z)-\sin(\pi k)}=\frac{1}{\cos(\pi k)}=(-1)^k$$

דוגמא ניקח

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_{n}z^{n}$$

כאשר $m\geq1$. נניח שהטור מתכנס ברדיוס R. הפונקציה סינגולרית בנקודה 0, ומתקיים $\mathrm{Res}\left(f,0\right)=a_{-1}$, כי כדי שתהיה קדומה צריך שיתקיים $a_{-1}=0$.

דוגמא ניקח

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n}}$$

טור זה מתכנס במידה שווה ובהחלט בתחום $\{|z|>r\}$, לכל $r>0$. שוב, צריך להיפטר מהגורם של $\frac{1}{z}$, ולכן

$$\mathrm{Res}\left(e^{\frac{1}{z}},0\right)=1$$

משפט 1.1 (משפט השארית) תהי f פונקציה גזירה על U, אם נקודות סינגולריות $\{z_{i}\}_{i=1}^{n}$. אזי לכל מסילה γ מתקיים

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left(f,z_{i}\right)\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z_{i}\right)$$

דוגמא נניח כי $\gamma=\partial B\left(0,R\right)$ שמכיל את כל השורשים של פולינום p. נסמן z_{i} את השורשים של p, m_{i} את הריבויים שלהם. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{p'\left(z\right)}{p\left(z\right)}\,\mathrm{d}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{i}\frac{m_{i}}{z-z_{i}}=\sum_{i}\mathrm{Res}\left(f,z_{i}\right)\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z_{i}\right)=\sum_{i}m_{i}=\deg\left(p\right)$$

דוגמא ניקח מסילה γ אליפטית שמקיפה את $0,\pi,2\pi$ אבל לא את $-\pi$ או 3π. כעת

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\sin z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z},0\right)\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(0\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z},\pi\right)\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(\pi\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z},2\pi\right)\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(2\pi\right)=$$
$$=1\cdot1+\left(-1\right)\cdot1+1\cdot1=1$$

דוגמא אנחנו מכירים את האינטגרל הממשי הבא:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^{2}+1}\,\mathrm{d}z=\pi$$

הראינו זאת גם בתרגילי הבית בקורס זה, על ידי לקיחת ריבוע באורך שגדל. אפשר לחשב את האינטגרל על הריבוע הזה להיות π על ידי שימוש במשפט השארית - הסינגולריות של $\frac{1}{z^2+1}$ הן בנקודות $\pm i$, והשאריות הן בהתאמה $\pm\frac{1}{2i}$.