תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

24 באפריל 2017

1 אינטגרציה

בשיעורים ראינו כל מני סוגי אינטגרציה:

- אינטגרל רימן על קטעים לפונקציות רציפות.
- אינטגרל על פני מסילות רציפות כלשהן.
- לפונקציות שהן מקומית נגזרת, ובפרט כל הפונקציות הגזירות.

הגדרה 1.1 עבור פונקציה רציפה f, ומסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ גזירה ברציפות, נגדיר

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \coloneqq \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

טענה 1.2 אם f נגזרת מקומית, γ גזירה ברציפות, אזי

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

הוכחה: מספיק לבדוק עבור תחום U שבו f היא נגזרת גלובלית, שכן שני האגפים אדיטיביים תחת שרשור מסילות. נסמן $f=F'$ ואז

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

■

טענה 1.3 תהי $\gamma:[0,1]\to U$ מסילה, ותהי פרמטריזציה אחרת של γ שנתונה על ידי $s:[0,1]\to[0,1]$, כך שמתקיים

$$s(0)=0, s(1)=1$$

ונחליף את $\gamma\left(t\right)$ בערך $\gamma\left(s\left(t\right)\right)$. אזי

$$\int\limits_{\gamma} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma\circ s} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

הוכחה: נניח כי U_i כיסוי של $\mathrm{Im}\gamma$ על ידי סביבות פתוחות בהן f נגזרת של F_i, ונניח כי $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ זמנים עבורם

$$\gamma\left(\left[t_i,t_{i+1}\right]\right)\subseteq U_i$$

אזי

$$\int\limits_{\gamma} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{n-1} F_i\left(\gamma\left(t_{i+1}\right)\right) - F_i\left(\gamma\left(t_i\right)\right)$$

במקרה שההעתקה s מונוטונית עולה, ועל כן חד־חד־ערכית ועל, נבחר $t_i' = s^{-1}\left(t_i\right)$ כך שמתקיים

$$s\left(\left[t_i',t_{i+1}'\right]\right) = \left[t_i,t_{i+1}\right]$$

ועל פי הגדרה נקבל

$$\int\limits_{\gamma\circ s} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i\left(\gamma\left(s\left(t_{i+1}'\right)\right)\right) - F_i\left(\gamma\left(s\left(t_i'\right)\right)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i\left(\gamma\left(t_{i+1}\right)\right) - F_i\left(\gamma\left(t_i\right)\right)$$

■

הגדרה 1.4 אורך של מסילה גזירה ברציפות:

$$\mathrm{length}\left(\gamma\right) = \int\limits_a^b \left|\gamma'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$$

טענה 1.5 אם f רציפה על γ, שגזירה ברציפות, ונניח כי $\left|f\mid_{\gamma}\right|\le M$, $\mathrm{length}\left(\gamma\right)=L$, אזי

$$\left|\oint\limits_{\gamma} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma'\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right| \le \int\limits_a^b \left|f\left(\gamma\left(t\right)\right)\right|\left|\gamma'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t \le M\int\limits_a^b \left|\gamma'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t = ML$$

דוגמא נניח כי f מוגדרת בתוך $\overline{B}(0,R)$, וחסומה על ידי M. אזי

$$\left|\oint_{\partial\overline{B}(0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 2\pi R\cdot M$$

$$\left|\oint_{\partial\overline{B}(0,R)} \underbrace{\frac{f(z)}{z^n}}_{|z|=R}\,\mathrm{d}z\right| \le 2\pi R^{1-n}M$$

כעת:

$$\int_{S^1} z^n\,\mathrm{d}z = \begin{bmatrix} z=e^{i\theta} \\ \theta\in[0,2\pi]\end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} i e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\pi}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & n\ne -1 \\ 2\pi i & n=-1\end{cases}$$

ואז

$$\int_{R\cdot S^1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i$$

לבסוף, אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ מסילה כללית, אזי

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\gamma \mathrm{d}\log z = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a))$$

נניח כי $\gamma(a)=\gamma(b)$. אזי המספר הזה הוא כפולה שלמה של $2\pi i$. אם $\varphi(t)$ היא עניף רציף של $\arg(\gamma(t))$אזי

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a)) = i(\varphi(b)-\varphi(a))$$

הגדרה 1.6 האינדקס של מסילה סגורה γ ביחס לנקודה $z_0\notin \mathrm{Im}\gamma$ הוא:
γרציפה ולא עוברת בנקודה z_0, ולכן קיים $\varphi(t)$ שהוא בחירה רציפה של $\arg(\gamma(t)-z_0)$, ואז האינדקס הוא

$$\mathrm{Ind}_{z_0}\gamma = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$$