תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

3 באפריל 2017

1 טורי חזקות

טורי חזקות הם טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

הגדרה 1.1 רדיוס ההתכנסות של טור חזקות כזה הוא

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

הגדרה 1.2 סדרת פונקציות מכתנסת במידה שווה מקומית בתחום U אם לכל $z \in U$ קיימת סביבה פתוחה $z \in V \subseteq U$ בה הסדרה מתכנסת במידה שווה.

משפט 1.3 $f(z) = \sum a_n z^n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה מקומית בתחום $\{|z| < R\}$. בנוסף לכל $|z| > R$, $\sum a_n z^n = \infty$.

טענה 1.4 עבור $z, z_0 \in \{|w| < R\}$ המקיימים $|z| + |z_0| < R$ מתקיים

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m z_0^{m-n} \right) z^n$$

הוכחה: כאשר $|z| + |z_0| < R$, אזי הטור

$$\sum a_n \left(|z| + |z_0|\right)^n$$

מתכנס (בהחלט) ולכן נשנה סדר סכימה:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(|z_0| + |z|\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{m} \left(\binom{m}{n} |z_0|^{m-n} |z|^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m |z_0|^{m-n} \right) |z|^n$$

בפרט הטורים הפנימיים מתכנסים. לכן השוויון שלמעלה מתקיים גם בלי ערכים מוחלטים.

■

הערה 1.5 קיבלנו שבהינתן טור סביב 0 ברדיוס R, עבור $|z_0| < R$ אפשר לפתח טור סביב z_0 ורדיוס ההתכנסות יהיה לפחות $R - |z_0|$.

טענה 1.6 בתחום ההתכנסות $\{|x| < R\}$, הפונקציה $f(z) = \sum a_n z^n$ היא גזירה (במובן המרוכב) והנגזרת נתונה על ידי

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

בנוסף רדיוס ההכתנסות של f' הוא גם כן R.

הוכחה: בהינתן טור סביב 0, $f(z) = \sum a_n z^n$, נחשב את הנגזרת בנקודה 0:

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}(f(z) - f(0)) = \lim_{z\to 0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) = a_1$$

כדי לחשב את $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}(f(z+z_0) - f(z_0)) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n} a_m z_0^{m-n}\right) z^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m z_0^{m-1}$$

רדיוס ההתכנסות של הנגזרת:

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} |m a_m|^{\frac{1}{m}} = \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{R}$$

■

הערה 1.7 קיבלנו שלטור חזקות תמיד יש קדומה באותו רדיוס:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

מסקנה 1.8 f אנליטית בתחום U אם ורק אם f' אנליטית בתחום U.

דוגמאות

.1

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ומכאן

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

2. טור חזקות של $\log(1+z)$ - נפתח כקדומה של $\frac{1}{1+z}$:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$
$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

תרגיל הראו שבדיסק $\{|z|<1\}$ מתקיים

$$g(z) \coloneqq (1+z)^\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n!} z^n \eqqcolon f$$

פתרון f אנליטית כי היא טור חזקות. g אנליטית, כי $g(z) = e^{\alpha \log(1+z)}$, ואפשר להגדיר $\log(1+z)$ בתחום $\{|z|<1\}$. נשים לב כי

$$(1+z) f' = \sigma f$$
$$(1+z) g' = \sigma g$$

נגדיר:

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

כעת, h גזירה בתחום, כי $g \neq 0$ בתחום, ואז

$$h'(z) = \frac{f'(z) g(z) - g'(z) f(z)}{g^2(z)} = \frac{\frac{\sigma}{1+z}(fg - gf)}{g^2} = 0$$

קיבלנו כי h קבועה, וכן $h(0) = \frac{1}{1} = 1$. לכן $h \equiv 1$ ואז $f = g$.

2 אינטגרלים

ראינו שבהינתן מצולע קמור $\gamma = [w_1, \ldots, w_n, w_1]$, אז

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & z_0 \text{ is in the interior of } \gamma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

טענה 2.1 (נוסחת קושי) יהי $f(z) = \sum a_n z^n$ טור מתכנס ברדיוס R, ויהי γ מצולע סגור, קמור, שמכיל את 0 (בפנים). אזי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z = a_n$$

הוכחה:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\sum a_k z^k}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n-1}}_{I_1} + \underbrace{a_n z^{-1}}_{I_2} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n-1}}_{I_3} \right) \mathrm{d}z$$

נחשב את האינטגרלים:

$$\int_\gamma I_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_\gamma a_k z^{k-n-1} \,\mathrm{d}z = 0$$

האיינטגרלים הם אפס שכן הם אינטגרלים על פונקציות בעלות קדומה על מסילה סגורה - ולכן 0. כמו כן,

$$\int_\gamma I_3 = \int_\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n-1} \,\mathrm{d}z = 0$$

זה אינטגרל של פונקציה אנליטית, וראינו שלפונקציה אנליטית יש קדומה, לכן כמו קודם האינטגרל מתאפס. לכן

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z = \int_\gamma a_n \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi i a_n$$

■

תרגיל (לבית) השתמשו באינטגרציה בחלקים ובנוסחת קושי כדי לחשב את טור החזקות של הפונקציה $f(z) = e^z$.