תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

27 במרץ 2017

1 גזירות

פונקציה גזירה בנקודה z_0 אם היא בקירוב לינארית שם - כלומר אם קיים הגבול

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}$$

נשים לב להבדל מדיפרנציאביליות כפונקציה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ - העתקות לינאריות $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ זה מרחב ווקטורי ממשי ממימד 4. העתקות לינאריות מרוכבות $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ זה מרחב ווקטורי ממימד 1 מעל $\mathbb{C}$, או 2 מעל $\mathbb{R}$.

אם נכתוב $f=u+iv$, $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, אפשר לגזור רכיב רכיב ולקבל תנאים על הנגזרות החלקיות, לפי כך שהדיפרנציאל צריך להיות

$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

קושי־רימן f גזירה בנקודה z_0 אם ורק אם $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ וכן

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

דרך נוספת לראות את המשוואות הללו - נתבונן בשינוי בכל ציר, ממשי ומרוכב:

$$f\left(z_0+h\right)\approx f\left(z_0\right)+hf'\left(z_0\right)\approx f\left(z_0\right)+h\left(u_x+iv_x\right)$$
$$f\left(z_0+ih\right)\approx f\left(z_0\right)+ihf'\left(z_0\right)\approx f\left(z_0\right)+h\left(u_y+iv_y\right)$$
$$\Downarrow$$
$$u_y+iv_u=i\left(u_x+iv_x\right)$$

דוגמאות לפונקציות גזירות:

1. פונקציות קבועות, נגזרת 0.
2. הזהות, נגזרת 1.
3. פולינומים - נגזרת כמו בממשיים.
4. z^{-n}, גזירה בכל נקודה שאינה 0, נגזרת כרגיל.
5. e^z גזירה ונגזרתה היא עצמה. מכאן נקבל כי גם

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

גזירות.

פונקציה לא גזירה: $z \mapsto \overline{z}$, בממשיים

$$(x,y) \to (x,-y)$$

זו העתקה לינארית, והדיפרנציאל הוא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

וזה לא מקיים את משוואות קושי רימן באף נקודה. לכן זה לא גזיר באף נקודה.
העתקות מוביוס תמיד גזירות, ומקיימות

$$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

טענה 1.1 אם $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ גזירה, אזי f קבועה.

הוכחה: $f = u + iv$, $v = 0$, ולכן $v_x = v_y = 0$, כלומר גם $u_x = u_y = 0$ מקושי רימן. ■

1.1 ענפים של פונקציות

עניין רוצים להפוך את e^z, ולהגדיר $\log$. e^z כבר לא חד־חד־ערכית:

$$e^{x+iy} = e^{x+iy+2\pi ik}$$

לכן נגדיר

$$\log(z) = \{x + iy + 2\pi ik\} = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} x &= \log|z| \\ y &= \arg z \end{aligned}$$

ענף רציף לפונקציה מרובת ערכים g הוא פונקציה רציפה G על U שמוכלת בתחום ההגדרה של g, שמקיימת $G(z) \in g(z)$ לכל $z \in U$.
למשל, ענף של הארגומנט:

$$\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi)$$

לכל $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$. זה מגדיר ענף של הלוגריתם:

$$\log z = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

טענה 1.2 אין ענף רציף של $\arg$ על מעגל היחידה S^1.

הוכחה: נניח שקיים ענף כזה f. נתבונן בקבוצות

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in (-\delta, \pi + \delta)\right\} \\ U_2 &= \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in (-\pi - \delta, \delta)\right\} \end{aligned}$$

על U_1, U_2 קיימים ויחידים ענפים רציפים של $\arg$ שמקיימים $f_1(1) = f(1), f_2(1) = f(1)$. הם מהצורה

$$\begin{aligned} f_1\left(e^{i\theta}\right) &= \theta \\ f_2\left(e^{i\theta}\right) &= \theta \end{aligned}$$

נקבל כי

$$\operatorname{Im}\left(f_1 - f\mid_{U_1}\right) \subseteq \{2\pi k \mid k \in \mathbb{R}\}$$

זו פונקציה רציפה מהקבוצה U_1 לקבוצה בת מניה, ולכן היא קבועה, וקבועה על אפס כי היא משיגה את 0 בנקודה 1. אז קיבלנו

$$f_1 = f\mid_{U_1}$$
$$f_2 = f\mid_{U_2}$$

כעת, $-1 \in U_1 \cap U_2$ ונקבל

$$-\pi = f_2\left(-1\right) = f\left(-1\right) = f_1\left(-1\right) = \pi$$

וזו בעיה. ■

בכל מקום שיש לנו ענף של $\log$ נקבל הגדרה של חזקה:

$$z^w = e^{w \log z}$$