תורת הפונקציות המרוכבות 1

ⓒ ארזים

20 במרץ 2017

תזכורת פונקציה רגולרית בנקודה z_0 אם $f\left(z+z_0\right)=f\left(z_0\right)+z^k\varphi\left(z\right)$, כאשר φ רציפה בנקודה 0 ומקיימת $\varphi\left(0\right)\neq 0$, $k\geq 1$ שלם.

דוגמא הפונקציה

$$z\mapsto e^z$$

מספיק לבדוק רגולריות בנקודה אחת בלבד:

$$e^{z+z_0}=e^z\cdot e^{z_0}$$

לכן ההזזה היא כפל בסקלר, ונשאר לבדוק בנקודה $z_0=0$. נרצה להראות כי

$$e^{z+z_0}=e^{z_0}\left(1+z\varphi\left(z\right)\right)$$

נגדיר

$$\varphi\left(z\right)=\frac{e^z-1}{z}$$

נגדיר $\varphi\left(0\right)=1$. יש לבדוק רציפות בנקודה 0:

$$\begin{aligned}e^x&=1+x+o\left(x\right)\\ \cos y&=1+o\left(y\right)\\ \sin y&=y+o\left(y\right)\end{aligned}$$

לכן,

$$\varphi\left(z\right)=\frac{e^xe^{iy}-1}{x+iy}=\frac{\left(1+x+o\left(x\right)\right)\left(1+iy+o\left(y\right)\right)-1}{x+iy}=\frac{x+iy+o\left(\left|x\right|+\left|y\right|\right)}{x+iy}=$$
$$=1+\frac{o\left(\left|x\right|+\left|y\right|\right)}{x+iy}\xrightarrow{x,y\to 0}1$$

הוכחנו בכיתה שפולינומים לא קבועים מתאפסים כי הם רגולריים בכל המישור - ההוכחה לא תעבוד כאן כי אין גבול באינסוף.

ראינו כל מיני דוגמאות לקבוצות קשירות ופשוטות קשר (בציורים). כמו כן, $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ היא לא פשוטת קשר (הסינגלטון הוא קומפקטי).

הגדרה 0.1 קבוצה K נקראת <u>קמורה</u> אם לכל $x, y \in K$ מתקיים $[x, y] \subseteq K$.

אינברסיה נתבונן בהעתקה

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

נעביר נקודה A לנקודה A' שנמצאת על אותה קרן מהראשית O. כמו כן

$$|OA|\,|OA'| = |z| \cdot \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = 1$$

כמו כן $0 \leftrightarrow \infty$.

טענה 0.2 אם $A \neq B \neq 0$, אזי $OAB \sim OB'A'$, ובפרט $\angle OAB = \angle OB'A'$.

הוכחה: יש זווית משותפת בנקודה O, וכן

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

ולכן הטענה נכונה ממשפט דימון צלע־זוית־צלע. ■

תזכורת אם $A \neq B$, אזי המעגל עם קוטר AB הוא בדיוק

$$\{x \mid \angle AXB = 90°\}$$

ההעתקה הזו מעבירה ישרים שעוברים דרך הראשית O לעצמם - כי כל נקודה מועתקת לנקודה על אותה קרן.

מעגלים שלא עוברים דרך O - אם המרכז בנקודה O והרדיוס r, המעגל עובר למעגל ברדיוס $\frac{1}{r}$ סביב O. אם המרכז לא בנקודה O, קיים ויחיד קוטר AB כך שהנקודה O על הישר AB. נשים לב כעת כי

$$\angle AXB = \angle OXB - \angle OXA = \angle OB'X' - \angle OA'X' = \angle A'XB'$$

נוכל בעזרת זה לראות התאמה מהספירה למישור, עם תוספת של נקודה באינסוף - ניקח את הקוטב הצפוני של הספירה, ונחבר לנקודה שעל הספרה. נמשיך את הישר הזה עד שיחתוך את המישור $z = 0$, ונקבל את ההתאמה. את הקוטב הצפוני נתאים לנקודה באינסוף. התאמה זו נקראת <u>ההטלה הסטריאוגרפית</u>.

טענה 0.3 בהטלה בסטריאוגרפית, מעגלים וישרים במישור מתחלפים עם מעגלים על הספירה. ישרים דרך הראשית מתחלפים עם מעגלים גדולים דרך הקוטב הצפוני, וישרים לא דרך הראשית מתחלפים עם מעגלים קטנים. מעגלים מתחלפים עם מעגלים לא דרך N.