תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

26 ביוני 2017

1 טורי לורן

נניח שיש לנו הטור

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

נדון בתחום ההתכנסות. הוא מתכנס בטבעת $A\left(0,r,R\right)$, עבור

$$R=\left(\limsup\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$
$$r=\left(\limsup\sqrt[n]{|a_{-n}|}\right)$$

משפט 1.1 אם f אנליטית בטבעת $A\left(0,r,R\right)\subseteq U$, אזי f ניתנת לפיתוח לטור לורן שמתכנס לפחות בטבעת $A\left(0,r,R\right)$. המקדמים הם

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

באשר $\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(0\right)=1$.

התנהגות בסינגולריות מבודדת - אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0, כלומר בטבעת $A\left(z_0,0,R\right)$ כלשהי, אזי

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

בטבעת הזו. אם החלק השלילי של הטור הוא אפס, הנקודה תהיה סינגולריות סליקה (והטור יהיה פשוט טור טיילור רגיל בכדור $\left(B_r\left(z_0\right)\right)$. אם רק מספר סופי של מקדמים שליליים לא מתאפסים, הנקודה היא קוטב, שהסדר שלו הוא n, עבור n המקסימלי שמקיים $a_{-n}\neq 0$. אם יש אינסוף מקדמים שליליים שלא מתאפסים, הנקודה היא סינגולריות עיקרית. נוכל לדעת גם האם הנקודה היא סינגולריות אינטגרבילית - זה שקול לכך שמתקיים $a_{-1}=0$.

תרגיל תהא $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ אנליטית, ויהא $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. נניח כי לכל $r>0$ מתקיים

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta\le r^{\alpha}$$

הוכיחו כי $f\equiv 0$.

פתרון f אנליטית בטבעת $A\left(0,0,\infty\right)$, ולכן נפתח אותה לטור לורן:

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

נחשב את המקדמים:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)}\frac{f\left(z\right)}{z^n}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

לכן

$$\begin{aligned}|a_n|&\le\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)}\frac{|f\left(z\right)|}{|z|^n}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|=\\|a_n|&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n}\cdot i\,\mathrm{d}\theta\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^n}\,\mathrm{d}\theta=\\&=\frac{1}{2\pi}r^{-n}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta\le\frac{r^{\alpha-n}}{2\pi}\end{aligned}$$

כעת, $\alpha\notin\mathbb{Z}$, ולכן $\alpha-n\neq 0$. אם זה חיובי, אז $r^{\alpha-n}\xrightarrow{r\to 0}0$. אם זה שלילי, $r^{\alpha-n}\xrightarrow{r\to\infty}0$. אבל קיבלנו כי $|a_n|\le\frac{r^{\alpha-n}}{2\pi}$ לכל r, ולכן $a_n=0$ לכל n. לכן $f=\sum 0z^n=0$.

הערה 1.2 אם $\alpha\in\mathbb{Z}$ היינו מקבלים $f=cz^{\alpha}$.

תרגיל פתחו את $f=\frac{1}{1+z^2}$ לטורי לורן עם מרכז אפס בכל הטבעות הרלוונטיות.

פתרון הקטבים הם בנקודות $\pm i$. לכן יש טורי לורן בכדור $B_1\left(0\right)$ ובטבעת $A\left(0,1,\infty\right)$. בתוך הכדור מתקיים

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^nz^{2n}$$

אפשר היה גם לכתוב

$$f\left(z\right)=\frac{a}{z-i}+\frac{b}{z+i}$$

ולפתח לפי אלה. כעת, בטבעת $A\left(0,1,\infty\right)$ נוכל לכתוב

$$\frac{1}{1-w}=\frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w}-1}=-\frac{1}{w}\sum_{n=-\infty}^{0}w^{n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}w^{n}$$

ומכאן בסך הכל, לכאורה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^{n}=0$$

כמובן שזה לא נכון, כי הטור הזה לא מתכנס בשום נקודה (וטור לורן הוא יחיד). בטבעת, קיבלנו

$$f=\frac{1}{1+z^{2}}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-z^{2}\right)^{n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-1\right)^{n+1}z^{2n}$$

תרגיל פתחו לטורי לורן:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}$$

פתרון מתקיים

$$f\left(z\right)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$$

לגורם הימני יש פיתוחים בתחומים $B_{1}\left(0\right)$, $A\left(0,1,\infty\right)$ ולשמאלי בתחומים $B_{2}\left(0\right)$, $A\left(0,2,\infty\right)$. לכן נקבל שלושה תחומים: $B_{1}\left(0\right)$, $A\left(0,1,2\right)$, $A\left(0,2,\infty\right)$. ראשית בכדור:

$$f\left(z\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

כעת בטבעת $A\left(0,1,2\right)$:

$$f\left(z\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}2^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{n}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^{n}\cdot\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}} & n\geq0\\ 1 & n<0\end{cases}$$

נותרה הטבעת $A\left(0,2,\infty\right)$:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{n}2^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{n}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$