תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

19 ביוני 2017

1 סינגולריות, פונקציות מרומורפיות

הגדרה 1.1 נקודה z_0 תקרא סינגולריות מבודדת של f אם f מוגדרת ואנליטית $B_r^*\left(z_0\right)$.
יש שלושה סוגים:

1. סינגולריות סליקה, משמע

$$\lim_{z\to z_0} f\left(z\right)\in\mathbb{C}$$

ניתן להמשיך במצב זה את f אנליטית בנקודה z_0 וניתן לכתוב $f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^n g\left(z\right)$ באשר g אנליטית עם $g\left(z_0\right)\neq 0$. אם $n>0$ אזי נאמר שלפונקציה f יש אפס מסדר n.

2. קוטב, משמע

$$\lim_{z\to z_0} f\left(z\right)=\infty$$

אזי $f\left(z\right)=\frac{1}{\left(z-z_0\right)^n}g\left(z\right)$, כאשר g אנליטית עם $g\left(z_0\right)\neq 0$. נאמר כי z_0 הוא קוטב מסדר n של f.

3. סינגולריות עיקרית - הגבול לא קיים.

בנקודה $z_0=\infty$ נאפיין את f לפי $g\left(z\right)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ בנקודה 0 (רק כאשר f מוגדרת בסביבה של אינסוף). אם יש סינגולריות סליקה או 0 אזי $f\left(z\right)=z^n h\left(z\right)$ עבור h רציפה באינסוף עם $h\left(\infty\right)\neq 0$. אם יש קוטב מסדר n אזי $f\left(z\right)=z^n h\left(z\right)$ גם כן.

דוגמאות

1. e^z - כל מה שצריך לבדוק זה אינסוף, ושם אין גבול (אפשר לשאוף למשל לאורך הממשיים החיוביים או הממשיים השליליים ולקבל שני גבולות שונים). לכן זו סינגולריות עיקרית.
2. $e^{\frac{1}{z}}$ - באפס יש סינגולריות עיקרית מהדוגמה הקודמת ומאיך שהגדרנו סינגולריות עיקרית. באינסוף יש סינגולריות סליקה (כי בסעיף הקודם הפונקציה הייתה מוגדרת באפס).

3. $\frac{1}{\sin z}$ - הסינגולריות הן בנקודות $\pi\mathbb{Z}$. אפשר לפתח לטור ולקבל

$$\sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\ldots$$
$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^{2}}{3!}+\ldots$$

ולכן נובע שיש קוטב פשוט בנקודה $z=0$ (כדי לחשב את סדר הקוטב אפשר לחפש את החזקה השלילית המובילה בפיתוח). אותו טיעון מראה שיש קוטב פשוט גם בכל πn, שכן $\frac{(-1)^{n}}{\sin z}=\frac{1}{\sin(\pi n+z)}$. הפונקציה לא מוגדרת בסביבה של אינסוף, ולכן אין על מה לדבר.

הגדרה 1.2 f נקראת מרומורפית בתוך U אם היא מוגדרת בכל U למעט סינגולריות מבודדות מסוג קוטב.

טענה 1.3 אם f מרומורפית בכל $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, אזי $f=\frac{p(z)}{q(z)}$ רציונלית (p,q פולינומים).

זו הכללה של טענה שראינו - אם f אנליטית בכל $\mathbb{C}$ ויש לה גבול באינסוף (במובן הרחב) אזי f בהכרח פולינום (אם הגבול סופי היא בהכרח קבועה). **הוכחה:** f מרומורפית באינסוף, כלומר אינסוף היא סינגולריות מבודדת, ולכן כל הסינגולריות האחרות נמאצות בתוך כדור מסויים. לכן יש רק מספר סופי שלהן (כי זו קבוצה קומפקטית). נניח שאלה $p_{1},\ldots,p_{n}$ מסדרים $\mu_{1},\ldots,\mu_{n}$. אזי

$$g\left(z\right)=g\left(z\right)\prod_{i=1}^{n}\left(z-p_{i}\right)^{\mu_{i}}$$

היא אנליטית בכל $\mathbb{C}$. גם באינסוף $f\left(z\right)=z^{m}h\left(z\right)$ עבור $m\in\mathbb{Z}$ ולכן

$$\lim_{z\to\infty}g\left(z\right)=\begin{cases}\infty & m+\sum\mu_{i}>0\\ c<\infty & m+\sum\mu_{i}=0\\ 0 & m+\sum\mu_{i}<0\end{cases}$$

לכן מהתזכורת נקבל כי g פולינום, ולכן נסיים. ■

משפט 1.4 (עקרון הארגומנט - מוכלל) תהא f מרומורפית בתחום U, ותהי $\gamma\subseteq U$ מסילה סגורה ופשוטה הומולוגית (כלומר האינדקס של כל נקודה הוא 0 או 1) כך שלפונקציה f אין קטבים או אפסים על γ. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Ind}\left(f\circ\gamma,0\right)=N-P$$

כאשר N הוא מספר האפסים שם f בתוך התחום שאותו γ חוסמת, כולל ריבוי, וכן P הוא מספר הקטבים באותו תחום, כולל ריבוי.

הוכחה: נסמן $V=\{z\notin \mathrm{Im}\gamma \mid \mathrm{Ind}\,(\gamma,z)=1\}$. נכתוב $V'=V\cup\mathrm{Im}\gamma$, ואז $V'\subseteq U$ קומפקטית ולכן יש לפונקציה f מספר סופי של אפסים וקטבים בתוך V' (שכולם כמובן בתוך V). נסמן אותם: $z_1,\dots,z_n$ אפסים מסדר $\mu_1,\dots\mu_n$, $w_1,\dots,w_m$ קטבים מסדר $\nu_1,\dots,\nu_m$. כעת אפשר לכתוב

$$f\left(z\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(z-z_i\right)^{\mu_n}}{\prod\limits_{i=1}^{m}\left(z-w_i\right)^{\nu_i}}g\left(z\right)$$

כאשר g אנליטית בכל V' ולא מתאפסת בו. כעת, נשתמש בעובדה שהנגזרת הלוגריתמית $\frac{f'}{f}$ היא אדיטיבית, משמע

$$\frac{\left(\varphi\psi\right)'}{\varphi\psi}=\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{\psi'}{\psi}$$

וכן בעובדה

$$\frac{\left(\left(z-z_i\right)^{\mu_i}\right)'}{\left(z-z_i\right)^{\mu_i}}=\frac{\mu_i\left(z-z_i\right)^{\mu_i-1}}{\left(z-z_i\right)^{\mu_i}}=\frac{\mu_i}{z-z_i}$$

ובסך הכל

$$\frac{f'}{f}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{z-z_i}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\nu_i}{z-w_i}+\frac{g'}{g}$$

מכאן ברור שעבור $z\in V$ מתקיים

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},z\right)=\begin{cases}\mu_i & z=z_i\\ -\nu_i & z=w_i\\ 0 & o/w\end{cases}$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z=\sum\mathrm{Res}\left(f,z\right)\mathrm{Ind}\left(\gamma,z\right)=\sum\mu_i-\sum\nu_i=N-P$$

■

תרגיל אין f אנליטית בתחום $\overline{D}$ שמקיימת $\left|f-\frac{1}{z}\right|<1$ לכל $|z|=1$. זה נובע ממשפט רושה (במקרה המוכלל של המרומורפיות), שאומר שאם זה היה מתקיים אז היה לפונקציות $f,\frac{1}{z}$ את אותו ביטוי $N-P$. f אנליטית, ולכן אי לה קטבים, משמע $N-P\geq 0$, אבל $\frac{1}{z}$ לא מתאפסת ויש לה קוטב אחד, משמע $N-P=-1$.