<u>תורת הפונקציות המרוכבות 1</u>

ⓒ ארזים

19 ביוני 2017

1 משפחות נורמליות ושקילות קונפורמית

הגדרה 1.1 משפחה $\mathcal{F}$ של פונקציות המוגדרות על U נקראת <u>נורמלית</u> אם לכל סדרה מתוכה יש תת סדרה שמתכנסת במידה שווה על קומפקטיות (אולי לאינסוף).

משפט 1.2 (טענת מונטל) משפחה של פונקציות חסומות במידה אחידה היא נורמלית.

בדומה, גם אם לכל קומפקט יש חסם משלו על כל הפונקציות, המשפחה תהיה נורמלית.

משפט 1.3 (משפט מונטל) משפחת הפונקציות שמפספסות את $0,1$ היא נורמלית.

משפט 1.4 (למת זלצמן) אם $\mathcal{F}$ לא נורמלית אז קיימים $z_n \to z$ בתום U, $r_n \to 0$ ופונקציות $f_n \in \mathcal{F}$ כך שמתקיים $f_n\left(z_n + r_n z\right) \to f$ במידה שווה על קומפקטיות על $\mathbb{C}$ לפונקציה f אנליטית לא קבועה.

השערה (ביברבך) נתבונן במשפחת הפונקציות $f : D \to \mathbb{C}$ החד־חד־ערכיות שמקיימות $f\left(0\right) = 0$, $f'\left(0\right) = 1$. נכתוב

$$f\left(z\right) = \sum a_n z^n = 0 + z + \sum a_n z^n$$

לכל $f \in \mathcal{F}$. אזי $\left|a_n\right| \leq n$.

השערה זו מוכחת, ונקראת היום משפט דה ברנז'ס.

דוגמה למשל $f\left(z\right) = \frac{z}{\left(1-\lambda z\right)^2}$, $\left|\lambda\right| = 1$. למשל

$$\frac{z}{\left(1-z\right)^2} = z\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

וזו חד־חד־ערכית.

הוכחה: נוכיח שלכל n חייב להיות M_n עם $\left|a_n\right| \leq M_n$ לכל $f \in \mathcal{F}$. נניח שלא, אזי קיים n וסדרה f_m כך שהסדרה $f_m^{(n)}\left(0\right)$ לא חסומה, אזי לא ייתכן שיש תת סדרה מתכנסת בתוך $\overline{B}_{\frac{1}{2}}\left(0\right)$. מצד שני $f_m\left(0\right) = 0$ ולכן לא תתכן תת סדרה שמתכנסת לאינסוף שם. לכן, אם נראה שהמשפחה נורמלית, נקבל סתירה.

טענה 1.5 לכל $f \in \mathcal{F}$ קיים $\left|w\right| = 1$ עם $w \notin \mathrm{Im} f$.

הוכחה: אחרת, $\overline{D} \subseteq \mathrm{Im}f$, ולכן $B_{1+\varepsilon}(0) \subseteq \mathrm{Im}f$. אזי $|f(z)| \geq (1+\varepsilon)|z|$ לכל $z \in D$ מהלמה של שוורץ ההפוכה. אזי בהכרח $|f'(0)| \geq 1+\varepsilon$ בסתירה. ■

כעת, תהא $f_n \in \mathcal{F}$ סדרה כלשהי. קיימים $|w_n| = 1$ שלא בתמונה של f_n. אזי $f_n - w_n$ לא מתאפסת וחד־חד־ערכית. D הוא פשוט קשר ולכן יש $g_n = \sqrt{f_n - w_n}$ וניתן להניח $1 \notin \mathrm{Im}g_n$ (על ידי החלפת סימן g_n אם צריך). אזי

$$g_n \in \{g : D \to \mathbb{C} \mid 0, 1 \notin \mathrm{Im}g\}$$

ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת על קומפקטיות $g_n \to g$ לא לאינסוף כי $|g_n(0)| = 1$. על ידי מעבר לתת סדרה ניתן להניח $w_n \to w \in S^1$ וכעת $f_n = g_n^2 + w_n \to g^2 + w$ במידה שווה על קומפקטיות. לכן $\mathcal{F}$ נורמלית.

■

משפט 1.6 (ההעתקה של רימן) כל תחום $U \subsetneq \mathbb{C}$ פשוט קשר שקול קונפורמית אל D - יש העתקה $f : U \to D$ חד־חד־ערכית ועל ואנליטית.

כמו כן, לכל $w_0 \in U$ נוכל לדרוש $f(w_0) = 0$, $f'(w_0) = 0$ ואז היא קיימת ויחידה.

תזכורת שקילויות קונפורמיות $f : D \to D$ הן העתקות מוביוס $\varphi_{\lambda,\mu}$.

לכן, השקילויות $f : U \to D$ הן $\varphi_{\lambda,\mu} \circ f_0$, השקילויות $g : D \to V$ הן $g_0 \circ \varphi_{\lambda,\mu}$, השקילויות $h : U \to V$ הן $g_0 \circ \varphi_{\lambda,\mu} \circ f_0$, והשקילויות $h : U \to U$ הן $f_0^{-1} \circ \varphi_{\lambda,\mu} \circ f_0$.

דוגמאות התחום $\mathbb{H} = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ שקול אל D על ידי $z \mapsto -\frac{iz+1}{z+i}$. העתקות מוביוס ששומרות את $\mathbb{H}$ הן $\frac{az+b}{cz+d}$ עבור $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$.

יש לנו גם שקילויות קונפורמיות בין התחום שחסום על ידי קרניים בזווית α אל $\mathbb{H}$ על ידי $z \mapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}}$.