תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

5 ביוני 2017

משפט 0.1 (הלמה של שוורץ) תהי $f:D\to D$ גזירה עם $f(0)=0$. אזי לכל $z\in D$ מתקיים $|f(z)|\le|z|$, ואם יש שוויון עבור $z_0\neq 0$ כלשהו אזי $f=\lambda z$ עבור $|\lambda|=1$.

תרגיל נניח כי f כמו בלמה, אבל מתאפסת באפס מסדר $m\ge 1$. אזי $|f(z)|\le|z|^m$ לכל $z\in D$, ואם יש שוויון עבור $z_0\neq 0$ כלשהו אזי $f=\lambda z^m$ עבור $|\lambda|=1$.

הוכחה: נתבונן בפונקציה $g(z)=\frac{f(z)}{z^m}$ עבור $z\neq 0$. היא בעלת סינגולריות סליקה בנקודה $z=0$, ונמשיך אותה לפונקציה אנליטית שם. לכל $0<r<1$, מתקיים $|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|\le\frac{1}{r^m}$ עם $\partial B_r(0)$. מתוך עקרון המקסימום, נקבל $|g(z)|\le\frac{1}{r^m}$ על כל $z\in\overline{B}_r(0)$. אזי לכל $z\in D$, עבור $|z|<r<1$, מתקיים $z\in B_r(0)$ ולכן

$$|g(z)|\le\frac{1}{r^m}\xrightarrow{r\to 1}1$$

כלומר $|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|\le 1$ לכל $z\in D$. אם היה שוויון בנקודה מסויימת $z_0\neq 0$, היינו רואים $|g(z_0)|=1$, וזה מקסימום מקומי (אפילו גלובאלי) של g על D, ולכן g קבועה - ולכן $f=\lambda z^m$ עם $|\lambda|=1$. ■

תרגיל תהי $f:D\to\mathbb{C}$ אנליטית וחד־חד־ערכית, עם $D\subseteq f(D)$, $f(0)=0$. אזי $|f(z)|\ge|z|$ לכל $z\in D$, ואם יש שוויון בנקודה $z_0\neq 0$ אזי $f(z)=\lambda z$ עבור $|\lambda|=1$.

הוכחה: נסמן $U=f(D)$. אזי $g=f^{-1}:U\to D$ אנליטית, חד־חד־ערכית ועל. אזי $g\mid_D:D\to D$ אנליטית, $g(0)=0$, ולכן מהלמה של שוורץ מתקיים $|g(z)|\le|z|$ לכל $z\in D$. לכן $|w|\le|f(w)|$ לכל $w\in g(D)=f^{-1}(D)$. עבור $w\notin f^{-1}(D)$, נקבל $f(w)\notin D$ כלומר $|w|<1\le|f(w)|$, וסיימנו. אם יש שוויון, אז הוא בהכרח עבור $w_0=g(z_0)$, ולכן g לינארית - ומכאן שגם ההופכית שלה f. ■

מסקנה 0.2 אם $f:D\to D$ אנליטית, חד־חד־ערכית ועל עם $f(0)=0$, אזי $f=\lambda z$ עבור $|\lambda|=1$.

מסקנה 0.3 (הכללה של שוורץ) תהי $f:D\to D$ עם $f(a)=b$ עבור $a,b\in D$. אזי נסמן

$$\varphi_w(z)=\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\varphi_{\lambda,w}(z)=\lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

כמו כן מתקיים $\varphi_w^{-1} = \varphi_{-w}$. נשים לב כעת שההעתקה

$$\varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a} : D \to D$$

מקבעת את 0, ולכן

$$\left|\varphi_b f \varphi_{-a}\left(z\right)\right| \leq \left|z\right|$$

נסמן $w = \varphi_{-a}\left(z\right)$ ונקבל

$$\left|\varphi_b f\left(w\right)\right| \leq \left|\varphi_a\left(w\right)\right|$$

ואם יש שוויון עבור $a \neq w$ אזי $\varphi_b f \varphi_{-a} = \varphi_{\lambda,0}$, ולכן $f = \varphi_{-b}\varphi_{\lambda,0}\varphi_a$ העתקת מוביוס.

משפט 0.4 (משפט פיקארד הקטן) אם $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ לא קבועה ואנליטית, אזי f מפספסת לכל היותר ערך אחד.

תרגיל יהי $p \in \mathbb{C}\left[z\right]$ פולינום. אזי מתקיים שלכל $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אנליטית לא קבועה, $p \circ f$ על אם ורק אם $p\left(z\right) \neq a\left(z+b\right)^n + c$ עבור $a, b, c \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$.

הוכחה: ראשית נניח כי $p\left(z\right) = a\left(z+b\right)^n + c$. נרכיב את p על $f\left(z\right) = e^z - b$ ונקבל

$$p \circ f\left(z\right) = a\left(e^z - b + b\right)^n + c = ae^{nz} + c$$

פונקציה זו כמובן לא מקבלת את הערך c (כי האקספוננט לא מתאפס) אלא אם $a = 0$ ואז היא קבועה. בכל מקרה היא לא על.

בכיוון השני, נניח כי $p\left(z\right) \neq a\left(z+b\right)^n + c$. אזי לכל $w \in \mathbb{C}$ מתקיים $\left|p^{-1}\left(w\right)\right| \geq 2$. נוכיח זאת: נניח שזה לא נכון, ויהי $w \in \mathbb{C}$ עם $\left|p^{-1}\left(w\right)\right| \leq 1$. p לא קבוע, ולכן יש פתרון של $p\left(z\right) - w$. פתרון זה יחיד (מההנחה) ונסמנו z_0. אזי $p\left(z + z_0\right) - w$ פולינום שמתאפס רק בנקודה 0, כלומר הוא מהצורה az^n. מכאן נקבל בסתירה $p\left(z\right) = a\left(z+b\right)^n + c$. לכן נוכל להניח שלכל $w \in \mathbb{C}$ יש לפחות שני מקורות. כעת, נראה כי $p \circ f$ על. יהי $w \in \mathbb{C}$. מתקיים $\left|p^{-1}\left(w\right)\right| \leq 2$, וממשפט פיקארד הקטן f לא יכולה לפספס את כל $p^{-1}\left(w\right)$ שבטווח שם. לכן $w \in \operatorname{Im}\left(p \circ f\right)$. ■

משפט 0.5 (ארצלה־אסקולי) יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום, ויהיו $f_n : U \to \mathbb{C}$ חסומות במידה אחידה, כלומר קיים M עם $\left|f_n\right| \leq M$, וכולן ליפשיץ עם קבוע L, משמע

$$\left|f_n\left(x\right) - f_n\left(y\right)\right| \leq L\left|x - y\right|$$

אזי קיימת תת סדרה f_{n_k} שמתכנס במידה שווה על קומפקטיות בתוך U.

הוכחה: ראשית, תהי $X = \{x_n\} \subseteq U$ קבוצה צפופה ובת מנייה. אזי קיימת תת סדרה f_{n_k} עם $f_{n_k}(x_m) \xrightarrow{k\to\infty} y_m$ לכל m (כלומר התכנסות נקודתית על X). זה דורש רק חסימות. כעת, עבור f_{n_k} כזו, יחד עם ליפשיציות נוכל להראות התכנסות במידה שווה על קומפקטיות.

תהי K קומפקטית. ניקח כיסוי סופי עם כדורים $B\left(\alpha_i, \frac{\varepsilon}{6L}\right)$. בכל כדור נוכל לבחור נקודה $x_{m_i} \in B\left(\alpha_i, \frac{\varepsilon}{6L}\right)$. נבחר N גדול מספיק כך שהחל ממנו בתת הסדרה מתקיים לכל $k_1, k_2 > N$:

$$\left|f_{n_{k_1}}(x_{m_i}) - f_{n_{k_2}}(x_{m_i})\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

לכל i. לכל נקודה $x \in K$ קיימת x_{m_i} כלשהי עבור $|x - x_{m_i}| < \frac{\varepsilon}{3L}$, ולכן $\left|f_{n_j}(x_{m_i}) - f_{n_j}(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. מכאן נוכל לקבל התכנסות במידה שווה של התת סדרה מתנאי קושי. ■