תורת הפונקציות המרוכבות 1

ארזים ©

13 במרץ 2017

1 חזרה - מספרים מרוכבים

שדה המספרים המרוכבים:

$$\mathbb{C}=\left\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R},i^{2}=-1\right\}$$

1.1 פעולות בסיסיות

יש חיבור וחיסור:

$$\left(a+bi\right)\pm\left(c+di\right)=\left(a\pm c\right)+\left(b\pm d\right)i$$

יש כפל:

$$\left(a+bi\right)\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(bc+ad\right)i$$

יש פעולת הצמדה:

$$z=a+bi,\overline{z}=a-bi$$

ההצמדה מכבדת את הפעולות הקודמות:

$$\begin{aligned}\overline{z_{1}\pm z_{2}}&=\overline{z_{1}}\pm\overline{z_{2}}\\ \overline{z_{1}z_{2}}&=\overline{z_{1}}\cdot\overline{z_{2}}\end{aligned}$$

כמו כן מתקיים

$$z=a+bi\in\mathbb{R}\iff b=0\iff\overline{z}=z$$

יש נורמה (ערך מוחלט):

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

מזדהה עם הנורמה האוקלידית של $\mathbb{R}^2$. כמובן, $|z|^2 = z\overline{z}$. הערך המוחלט כפלי:

$$|zw|^2 = (zw)\left(\overline{zw}\right) = (zw)\left(\overline{z}\cdot\overline{w}\right) = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

כמו כן, $|z| \in \mathbb{R}$, $0 \leq |z|$, וכן $z = 0 \iff |z| = 0$. לכן נוכל להגדיר חילוק:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$$

ערך ממשי ומדומה (הטלות): אם $z = a+bi$, אזי החלק הממשי של z הוא

$$\mathrm{Re}\,(z) = a = \frac{z+\overline{z}}{2}$$

והחלק המדומה של z הוא

$$\mathrm{Im}\,(z) = b = \frac{z-\overline{z}}{2}$$

כמובן, מתקיים

$$|\mathrm{Re}\,(z)|, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$$

1.2 אי שוויון המשולש

מהדבר האחרון נסיק את אי שוויון המשולש:

מסקנה 1.1 (אי שוויון המשולש) לכל שני מספרים מרוכבים z, w מתקיים

$$||z|-|w|| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|z+w| \leq |z|+|w| &\iff \\
|z+w|^2 \leq |z|^2+|w|^2+2|z||w| &\iff \\
(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right) \leq z\overline{z}+w\overline{w}+2|z||w| &\iff \\
z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} \leq z\overline{z}+w\overline{w}+2|z||w| &\iff \\
2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq 2|z||w| = 2|z\overline{w}|
\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.2 (זהות המקבילית) לכל שני מספרים מרוכבים z,w מתקיים

$$\left|z+w\right|^{2}+\left|z-w\right|^{2}=2\left(\left|z\right|^{2}+\left|w\right|^{2}\right)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left|z+w\right|^{2}+\left|z-w\right|^{2} &= \left|z\right|^{2}+\left|w\right|^{2}+2\mathrm{Re}\left(z\overline{w}\right)+\left|z\right|^{2}+\left|-w\right|^{2}+2\mathrm{Re}\left(z\left(-\overline{w}\right)\right)= \\ &= 2\left|z\right|^{2}+2\left|w\right|^{2}+2\mathrm{Re}\left(z\overline{w}\right)-2\mathrm{Re}\left(z\overline{w}\right)=2\left(\left|z\right|^{2}+\left|w\right|^{2}\right)\end{aligned}$$

■

תרגיל חשבו את

$$\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{2017}$$

פתרון

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{1-2i} &= \frac{\left(2+i\right)\left(1+2i\right)}{\left|1-2i\right|^{2}}=\frac{2-2+i+4i}{1^{2}+2^{2}}=\frac{5i}{5}=i \\ i^{2017} &= i^{2016}\cdot i=\left(i^{4}\right)^{504}\cdot i=1^{504}\cdot i=i\end{aligned}$$

1.3 אקספוננט

מגדירים כך:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

מכאן מקבלים גם אקספוננט של מספר מרוכב:

$$e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=r\cdot\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

כאשר $r=e^{x},\theta=y$.
האקספוננט מכבד הצמדה:

$$e^{\overline{i\theta}}=e^{-i\theta}=\cos\left(-\theta\right)+i\sin\left(-\theta\right)=\cos\theta-i\sin\theta=\overline{e^{i\theta}}$$

1.4 הצגה פולרית

כל $z \neq 0$ ניתן להציג בתור

$$z = re^{i\theta}$$

כאשר $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$. מתקיים

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}, \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$$

אם מצמצמים את הזוויות האפשריות לקטע חצי סגור חצי פתוח באורך 2π מקבלים שהזווית θ יחידה.

כפל בהצגה פולרית נעשה פשוט מאוד:

$$\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta}$$

מסקנה 1.3 לכל $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, קיים פיתרון למשוואה $z^n = w$ (אם $w \neq 0$ אז יש בדיוק n פתרונות).

הוכחה: אם $w = 0$ אזי $z = 0$ הוא פתרון. אחרת, נכתוב $w = r_0e^{i\theta_0}$, $z = re^{i\theta}$. חייב להתקיים

$$r^n = r_0$$

שמגדיר את r ביחידות (כי הוא אי שלילי), וכן

$$e^{in\theta} = e^{i\theta_0}$$

כלומר מתקיים

$$n\theta = \theta_0 + 2\pi k$$

מה שנותן n פתרונות שונים. ■

דוגמא נפתור את $z^{2017} = 1 - i$. מתקיים

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\sin\theta_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_0 = -\frac{\pi}{4}$$

נקבל כי $r = \sqrt[4034]{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{4\cdot 2017} + \frac{2\pi k}{2017}$.

2 טופולוגיה במרוכבים

הגדרה 2.1 נאמר כי סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ מתכנסת לגבול $z_0 \in \mathbb{C}$ אם

$$|z_n - z_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

התכנסות זו שקולה לשתי ההתכנסויות הבאות:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_n) &\to \operatorname{Re}(z)\\ \operatorname{Im}(z_n) &\to \operatorname{Im}(z)\end{aligned}$$

הגדרה 2.2 סביבה כדורית של $z_0 \in \mathbb{C}$ היא כדור פתוח מהצורה

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

כעת, $z_n \to z$ אם ורק אם לכל סביבה של z_0, הסדרה מוכלת בה החלק ממקום מסויים.

הגדרה 2.3 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה כדורית של x שמוכלת בתוך X. למשל - כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. כדור סגור אינו קבוצה פתוחה (כל סביבה של כל נקודת שפה תכיל נקודות מחוץ לכדור).
קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת סגורה אם $\mathbb{C}\backslash X$ פתוחה, שזה שקול לכך שלכל סדרה $\{z_n\} \subseteq X$ שמתכנסת לגבול $z \in \mathbb{C}$, מתקיים גם $z \in X$.

הגדרה 2.4 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים

$$|x| < R$$

הגדרה 2.5 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת קומפקטית אם לכל $\{z_n\} \subseteq X$ קיימת תת סדרה $\{z_{n_k}\}$ שמתכנסת אל $z_0 \in X$. תנאי זה שקול לסגירות וחסימות של הקבוצה.

הגדרה 2.6 תהי $f : U \to \mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת ($U \subseteq \mathbb{C}$). נאמר כי f רציפה בנקודה z_0 אם לכל סדרה $\{z_n\}$ שמתכנסת אל z_0, מתקיים

$$f(z_n) \to f(z_0)$$

דוגמאות

1. הפונקציה $z \mapsto e^z$ רציפה בכל נקודה.
2. פולינומים הם רציפים בכל נקודה.

.3

$$z \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{z}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

לא רציפה בנקודה 0 - ניקח את הסדרה $z_n = \frac{1}{n}$, אזי

$$f(z_n) = e^n \to \infty$$

אם ניקח את הסדרה $z_n = \frac{2}{2\pi n} i$, אזי

$$f(z_n) = e^{-2\pi n i} = 1$$

3 ספירת רימן

הגדרה 3.1 ספירת רימן היא

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

נגדיר כי $z_n \to \infty$ אם ורק אם $|z_n| \to \infty$, כלומר לכל סביבה $\mathbb{C}^* \backslash \overline{B(0,n)}$, הסדרה מוכלת בסביבה החל ממקום מסויים.

הגדרה 3.2 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}^*$ תיקרא פתוחה אם לכל נקודה $x \in X$ יש סביבה $x \in U \subseteq X$.
זה שקול לפתיחות הרגילה של $X \cap \mathbb{C}$, יחד עם הדרישה שאם $\infty \in X$ אזי קיים n עבורו $\mathbb{C}^* \backslash \overline{B(0,n)} \subseteq X$.
קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}^*$ תיקרא סגורה אם $\mathbb{C}^* \backslash X$ פתוחה, כלומר אם לכל $\{z_n\} \subseteq X$ שמתכנסת אל $z_0 \in \mathbb{C}^*$, מתקיים $z_0 \in X$. זה שקול לקומפקטיות סדרתית של X במובן הרגיל (לכל סדרה שמוכלת בקבוצה קיימת תת סדרה שמתכנסת לגבול בתוך הקבוצה). לכן יש שקילות לכך שהקבוצה X סגורה, במובן הרגיל, ואם היא לא חסומה, אז גם צריך שיתקיים $\infty \in X$.

הגדרה 3.3 פונקציה $f : U \to \mathbb{C}^*$ ($U \subseteq \mathbb{C}^*$), כאשר U סביבה של z_0, תיקרא רציפה בנקודה z_0 אם לכל $z_n \to z_0$ מתקיים $f(z_n) \to f(z_0)$.

דוגמאות

1. אם $f(z) = c$ קבועה, נוכל להגדיר $f(\infty) = c$ ולקבל פונקציה רציפה.
2. אם f פולינום לא קבוע, אזי אם $z_n \to \infty$ גם $f(z_n) \to \infty$, ולכן נגדיר $f(\infty) = \infty$ ונקבל פונציה רציפה.
3. עבור k אי שלילי ושלם, $f(z) = \frac{1}{z^k}$, כאשר $z_n \to 0$ מתקיים $f(z_n) \to \infty$, ואם $z_n \to \infty$ אזי $f(z_n) \to 0$, ולכן אם נגדיר כך בנקודות הבעייתיות נקבל פונקציה רציפה.

4. $f\left(z\right)=e^{z}$ - עבור $z_{n}=n$, נקבל $f\left(z_{n}\right)=e^{n}\rightarrow\infty$. אבל עבור $z_{n}=-n$, נקבל $f\left(z_{n}\right)\rightarrow0$. לכן אין גבול בנקודה, ולא נוכל להגדיר שם את הפונקציה באופן רציף.

טענה 3.4 $f\left(z\right)$ רציפה בנקודה ∞ אם ורק אם $f\left(\frac{1}{z}\right)$ רציפה בנקודה 0.